

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет
імені Івана Франка

Заболоцький М. В., Фединяк С. І., Філевич П. В.

Практикум з математичного аналізу

для студентів факультету прикладної математики
та інформатики. Частина 1.



Львів
Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка

УДК 517.1(076) і 517.2(076)
ББК В161 я73-4
З-12

Рецензенти:

Олег Георгійович Сторож, д-р фіз.-мат. наук
(Львівський національний університет імені Івана Франка);
Марта Тимофіївна Бордуляк, канд. фіз.-мат. наук
(Львівський національний університет імені Івана Франка)

Рекомендовано до друку науково-методичною радою
механіко-математичного факультету
Протокол N 11 від 15 червня 2005 року

Заболоцький М. В., Фединяк С. І., Філевич П. В.
З-12 Практикум з математичного аналізу. Частина 1. Заболоць-
кий М. В., Фединяк С. І., Філевич П. В. Львів: Видавничий
центр ЛНУ імені Івана Франка, 2005. – 80 с.

У практикумі з математичного аналізу розглянуто елементи теорії мно-
жин та дійсних чисел, границі послідовностей та границі функцій, непе-
рервні функції, основи диференційного числення.

Для студентів факультету прикладної математики та інформатики.

ББК В161 я73-4

© Заболоцький М. В. та ін., 2005

Передмова

Цей навчальний посібник написано на основі досвіду викладання курсу математичного аналізу на факультеті прикладної математики та інформатики Львівського національного університету імені Івана Франка.

Метою посібника є сприяти активізації вправ з математики, надати цим вправам, в деякому розумінні, характеру семінарських занять.

Велику увагу звернено на задачі, які поглиблюють теоретичний матеріал. Це зумовило і зміст книги: поряд з типовими задачами обчислювального характеру поміщені приклади і вправи, які пояснюють теорію, сприяють глибшому її розумінню і розвивають навички точного математичного мислення студентів.

Структура книги така. На початку кожного параграфу подається стислий теоретичний вступ, який містить основні означення, формулювання важливих теорем і найголовніші формули. Потім наводиться повне розв'язування декількох характерних задач. Далі поміщені задачі без розв'язку, аналогічні розглянутим, які часто містять деякі особливості. Частина з них наділена вказівками.

Як було вище зазначено, в тексті посібника подано повні розв'язки деяких прикладів і задач. Це виправдано наступними міркуваннями: маючи навчальний посібник зі зразками розв'язаних задач, викладач має змогу затратати менше часу на розгляд стандартних задач обчислювального характеру, а значну частину своєї уваги зосередити на розв'язування задач принциповішого характеру. Отже, буде оптимальніше використовуватись час занять. Крім цього, треба враховувати, що посібник допоможе тим студентам, які займаються самостійно. Для оптимального засвоєння матеріалу перед тим як приступати до розв'язування задач, потрібно добре вивчити теоретичний матеріал, який відноситься до теми відповідного параграфа; потім потрібно розібрати наведені задачі з розв'язками і обов'язково закріпити знання розв'язуванням вправ, наведених для самостійної роботи.

Розділ 1

Теорія множин. Дійсні числа

1.1. Метод математичної індукції

Метод математичної індукції. Щоб довести, що деяка теорема вірна для кожного натурального n , досить довести:

- 1) що ця теорема справедлива для $n = 1$;
- 2) що якщо ця теорема справедлива для якогось натурального числа n , то вона справедлива також і для наступного натурального числа $n + 1$.

Приклади розв'язування вправ

1. Довести формулу загального члена арифметичної прогресії

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Доведення. Формула справедлива для $n = 1$, оскільки тоді $a_1 = a_1$. Припустимо, що формула справедлива для $n = k$, тобто $a_k = a_1 + (k - 1)d$. Тоді $a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k - 1)d + d = a_1 + kd$. Як бачимо, якщо формула справедлива для $n = k$, то вона справедлива і для $n = k + 1$. Отже, формула справедлива у разі будь-якого натурального значення n .

2. Довести, що при всіх $n \geq 5$ має місце нерівність $2^n > n^2$.

Доведення. При $n = 5$ ця нерівність справедлива, оскільки $32 > 25$.

Припустимо, що при деякому довільному $k \geq 5$ виконується нерівність $2^k > k^2$, тоді справедлива також нерівність $2^k + 2^k > k^2 + k^2$. Оскільки $k^2 > 2k + 1$ (при $k \geq 5$), то з припущення випливає

$$2^{k+1} > k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

Отже, нерівність справедлива при всіх натуральних $n \geq 5$.

Вправи

I. Для всіх $n \in \mathbb{N}$ довести, що:

1.1. $n^3 + 5n$ ділиться на 6;

1.2. $n^2(n^4 - 1)$ ділиться на 60;

1.3. $5^{n+3} + 11^{3n+1}$ ділиться на 17;

1.4. $7^{2n} - 4^{2n}$ ділиться на 33;

1.5. $5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1}$ ділиться на 59;

1.6. $2^{3n} + 1$ ділиться на 3^{n+1} і не ділиться на 3^{n+2} .

II. Для всіх $n \in \mathbb{N}$ довести рівність:

1.7. $\sum_{i=1}^n i := 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

1.8. $\sum_{i=1}^n i^2 := 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

1.9. $\sum_{i=1}^n i^3 := 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

1.10. $\sum_{i=1}^n (2i - 1) := 1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$;

1.11. $\sum_{i=1}^n 2^{i-1} := 1 + 2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$;

1.12. $\sum_{i=1}^n i(3i - 1) := 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + \dots + n(3n - 1) = n^2(n + 1)$;

1.13. $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$;

1.14. $\frac{x}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}$;

1.15. $(a + b)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} b^i$, де $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ (формула бінома Ньютона);

1.16. $\prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{(i+1)^2}\right) := \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$;

1.17. $\sum_{i=1}^n \frac{1}{(i+3)(i+4)} = \frac{n}{4(n+4)}$.

III. Довести нерівності:

1.18. $\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$, $n \geq 2$.

1.19. $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ ($n \geq 1$);

1.20. $n^3 < 2^{n+1}$ ($n > 8$);

$$1.21. \prod_{i=1}^n \frac{2i-1}{2i} := \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad (n \geq 1);$$

$$1.22. \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} > 2(\sqrt{n+1} - 1) \quad (n > 1);$$

$$1.23. n^{n+1} > (n+1)^n \quad (n \geq 3);$$

$$1.24. \left| \sin \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n \sin x_k, \text{ якщо всі } x_k \in [0; \pi] \text{ і } n \geq 1;$$

$$1.25. (1+x)^n > 1+nx, \text{ якщо } x > -1, x \neq 0 \text{ і } n > 1 \text{ (нерівність Бернуллі)};$$

$$1.26. n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad (n > 1);$$

$$1.27. (2n)! < 2^{2n}(n!)^2 \quad (n > 1).$$

1.28. Відомо, що $x + \frac{1}{x}$ — ціле число. Довести, що $x^n + \frac{1}{x^n}$ — ціле число при всіх цілих n .

1.29. Довести, що при $n > 1$ число $2^{2^n} + 1$ закінчується цифрою 7.

1.30. Відомо, що $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$ ($k \geq 2$). Довести, що $a_n = 2^{n-1} + 1$, $n \geq 1$.

1.2. Логічні символи. Операції над множинами

1. Квантори. У математичних текстах заведено використовувати логічні символи, якими замінюють деякі вислови, що часто повторюються. Зокрема, замість висловів "для всіх", "для кожного", "для будь-якого" застосовують знак $\forall$, а замість слів "існує", "знайдеться" — знак $\exists$. Ці знаки називають, відповідно, кванторами загальності та існування. Знак $\exists!$ називають квантором єдиності і читають "існує єдиний".

2. Операції над множинами. "Об'єднанням" двох множин A та B називають множину

$$C = A \cup B = \{x : (x \in A) \text{ або } (x \in B)\}.$$

"Перетином" двох множин A та B називають множину

$$C = A \cap B = \{x : (x \in A) \text{ і } (x \in B)\}.$$

"Різницею" множин A та B називають множину

$$C = A \setminus B = \{x : (x \in A) \text{ і } (x \notin B)\}.$$

Аналогічно $B \setminus A = \{x : (x \in B) \text{ і } (x \notin A)\}$.

"Симетричною різницею" множин A та B називають множину

$$C = A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Приклади розв'язування вправ

1. Визначити, чи є наведені висловлення істинними і записати їх заперечення:

а) $(\forall x)(\exists y) : x + y^2 = 0$;

б) $(\exists x)(\exists y) : x < y + 100$.

Розв'язування. а) Висловлення є хибним, бо якщо $x > 0$, то $x + y^2 > 0$.

Заперечення до висловлення а) наступне: $(\exists x)(\forall y) : x + y^2 \neq 0$.

б) Висловлення є істинним (наприклад, $x = 1, y = 1$).

Заперечення: $(\forall x)(\forall y) : x \geq y + 100$.

2. Визначити множину A , якщо: $(\forall a \in A)(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 + a = 3$.

Розв'язування. Легко бачити, що $A = (-\infty; 3]$. Дійсно, покладемо $x = \sqrt{3 - a}$ або $x = -\sqrt{3 - a}$, де $a \in A$.

3. Знайти множини $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$, якщо $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x-3}{x+5} \leq 0\}$ і $B = \{x \in \mathbb{R} : x^3 + x < 0\}$.

Розв'язування. Маємо $A = (-5; 3]$ та $B = (-\infty; -1)$. Тоді $A \cup B = (-\infty; 3]$, $A \cap B = (-5; -1)$, $A \setminus B = [-1; 3]$, $B \setminus A = (-\infty; -5]$.

Вправи

І. Визначити, чи є наведені висловлення істинними і записати їх заперечення:

1.31. $(\forall x)(\forall y) : x + y = 3$; ~~—~~

1.32. $(\forall x)(\exists y) : x + y = 3$; ~~+~~

1.33. $(\exists y)(\forall x) : x + y = 3$; ~~—~~

1.34. $(\exists x)(\exists y) : x + y = 3$; ~~+~~

1.35. $(\forall x)(\exists! y) : x + y = 3$; ~~+~~

1.36. $(\exists x > 0)(\exists y > 0) : x + y = 0$; ~~—~~

1.37. $(\forall x > 0)(\exists y > 0) : x + y = 0$; ~~—~~

1.38. $(\forall x > 0)(\exists y < 0) : x + y = 0$; ~~+~~

1.39. $(\forall x)(\forall y) : x < y \Rightarrow x^2 < y^2$; ~~—~~

1.40. $(\forall x)(\forall y) : x < y \Rightarrow x^3 < y^3$; ~~+~~

- 1.41. $(\forall x)(\forall y) : x < y \Leftrightarrow x^3 < y^3$; $\neq$ 1.42. $(\forall x) : x^2 > x \Leftrightarrow x > 1 \vee x < 0$; $\neq$
 1.43. $(\forall x) : x^2 > x \Leftrightarrow x > 1$; $\neq$ 1.44. $(\forall x) : x^2 > x \Leftrightarrow x > 1 \wedge x < 0$; $\neq$
 1.45. $(\forall x) : x^2 > x \Leftrightarrow x < 0$; $\neq$

II. Визначити множину A , якщо:

- 1.46. $(\forall x \in A)(\exists n \in \mathbb{N}) : 2n = x$;
 1.47. $(\forall x \in A)(\exists n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}) : \frac{m}{n} = x$;
 1.48. $(\forall x \in A)(\exists y \in \mathbb{R}, y \geq 1) : 2^x = y$;
 1.49. $(\forall a \in A)(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 + 2ax + a = 0$;
 1.50. $(\forall a \in A)(\exists x \in \mathbb{R}) : 3a + 2ax - x^2 > 0$;
 1.51. $(\forall a \in A)(\exists b \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 + 2ax + b^2 + 1 > 0$.

III. Встановити істинність висловлень:

- 1.52. $\exists n \in \mathbb{N} : 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \in \mathbb{N}$;
 1.53. $(\exists n \in \mathbb{N}, n \geq 10)(\forall m \in \mathbb{N}) : \sqrt{nm^2} \in \mathbb{N}$;
 1.54. $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}) : \sqrt{nm} \in \mathbb{N}$;
 1.55. $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists r_1 \in \mathbb{Q})(\exists r_2 \in \mathbb{Q}) : r_1 r_2 + r_1 = n$;
 1.56. $(\forall a \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 + ax = 0$;
 1.57. $(\forall a \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 + 2ax + a = 0$;
 1.58. $(\forall a \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 - 2ax + a > 0$.

IV. Визначити і зобразити на малюнках множини $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$, якщо:

- 1.59. $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 6x + 8 < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 3x < 0\}$;
 1.60. $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < |x - 3| \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : 2|x| < 3\}$;
 1.61. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$;
 1.62. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 > y^3\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 > y^2\}$;
 1.63. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$.

V. Визначити множину A , якщо:

- 1.64. $A = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R}, |x| + |y| = 1\}$;
 1.65. $A = \{x \in \mathbb{R} : \forall y \leq 1, y \leq x^2\}$;
 1.66. $A = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R}, y^2 + x = 0\}$.

VI. Довести, що:

- 1.67. $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A) \subset A \setminus C$;

1.68. $A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C);$

1.69. $(A \cap C) \cup (B \cap D) \subset (A \cup B) \cap (C \cup D);$

1.70. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C);$

1.71. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C);$

1.72. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B;$

1.73. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C).$

✓ VII. Нехай для $m \in \mathbb{Z}$ і $n \in \mathbb{Z}$ множина $A_{mn} = \{x \in \mathbb{R} : m < x < m + n\}$.
Визначити наступні множини:

1.74. $B_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{mn};$

1.75. $C_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{mn};$

1.76. $\bigcap_{m=-\infty}^0 \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{mn};$

1.77. $\bigcap_{m \in \mathbb{Z}} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{mn};$

1.78. $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{mn};$

1.79. $\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{mn}.$

1.3. Відображення

Означення. Відображенням f множини X у множину Y ($f : X \rightarrow Y$) називають правило, яке кожному елементу з множини X ставить у відповідність *один і лише один* елемент множини Y .

Відображення $f : X \rightarrow Y$ називається *ін'єктивним*, або *ін'єкцією*, якщо різним елементам множини X ставиться у відповідність різні елементи множини Y , тобто

$$(\forall x_1 \in X)(\forall x_2 \in X) : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Відображення $f : X \rightarrow Y$ називається *сюр'єктивним*, або *сюр'єкцією*, якщо прообраз будь-якого елемента множини Y є непорожньою множиною, тобто

$$(\forall y \in Y) : f^{-1}(y) \neq \emptyset.$$

Відображення $f : X \rightarrow Y$ називається *бієктивним*, або *бієкцією*, якщо f є сюр'єктивним та ін'єктивним.

Приклади розв'язування вправ

1. Нехай $f(x) = \sin(x)$, $f : X \rightarrow Y$. У яких з наведених випадків відображення буде ін'єкцією, сюр'єкцією, бієкцією, якщо:

- а) $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$;
- б) $X = \mathbb{R}$, $Y = [-1; 1]$;
- в) $X = [0; \frac{\pi}{2}]$, $Y = [0; 3]$;
- г) $X = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $Y = (-1; 1]$.

Розв'язування. а) Відображення f не є ін'єктивним, бо взявши $x_1 = 0$, $x_2 = 2\pi$, бачимо, що $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$, а $\sin x_1 = \sin x_2 = 0$. Відображення f не є сюр'єктивним, бо, наприклад, прообраз числа $2 \in \mathbb{R}$ є порожньою множиною.

б) Відображення f не є ін'єктивним (див. а), але є сюр'єктивним, бо для довільного числа $y \in [-1; 1]$ прообраз $f^{-1}(y) = (-1)^n \arcsin y + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, тобто є не порожньою множиною.

в) Відображення f є ін'єктивним, оскільки

$$(\forall x_1, x_2 \in [0; \frac{\pi}{2}], x_1 \neq x_2) : \sin x_1 \neq \sin x_2.$$

Відображення f не є сюр'єкцією, оскільки, наприклад, прообраз числа $2 \in [0; 3]$ є порожньою множиною.

г) Відображення f є бієкцією.

2. Знайти $f(0)$, $f^{-1}(1)$, якщо f — відображення вправи 1.

Розв'язування. $f(0) = \sin 0 = 0$. У випадках а) та б)

$$f^{-1}(1) = \{\frac{\pi}{2} + 2\pi n : n \in \mathbb{Z}\}, \text{ а у випадках в) та г) } f^{-1}(1) = \{\frac{\pi}{2}\}.$$

Вправи

1.80. Функцію $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ задано співвідношенням $f(n) = 1 + n^2$. Визначити:

- 1) $f(0)$, $f(\{0\})$, $f(\{3; 4\})$, $f(\{-2; 2\})$;
- 2) $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{5\})$, $f^{-1}(\{4\})$, $f^{-1}(\{10; 17\})$, $f^{-1}(\{37; 38; 39\})$.

1.81. Для функції $f(x) = x^2 + 2x + 1$ визначити:

- а) $f(0)$, $f(\{-1; 1\})$, $f([-1; 2])$, $f((-2; 0])$;
- б) $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}((-1; 1))$, $f^{-1}([0; 2])$, $f^{-1}([1; +\infty))$.

1.82. Функцію $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ задано співвідношенням $f((m; n)) = (m; 0)$.

Визначити:

- а) $f(A)$, де $A = \{(0; n) : n \in \mathbb{Z}\}$; б) $f(B)$, де $B = \{(n; n) : n \in \mathbb{Z}\}$;
 в) $f^{-1}(C)$, де $C = \{(m; 0) : m \in \mathbb{N}\}$; г) $f^{-1}(D)$, де $D = \{(m; 0) : m \in \mathbb{Z}\}$.

1.83. Чи є відображення $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ і $g : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ ін'єкцією, сюр'єкцією, бієкцією, якщо:

- | | |
|--------------------------|--------------------------------|
| 1) $f(n) = n + (-1)^n$, | $g((m; n)) = (n; m)$; |
| 2) $f(n) = 2 - n$, | $g((m; n)) = (m + 1; n - 2)$; |
| 3) $f(n) = (-1)^n$, | $g((m; n)) = (m + n; m - n)$; |
| 4) $f(n) = n^2$, | $g((m; n)) = (m; -n)$. |

1.84. а) Яке з відображень $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є ін'єкцією, сюр'єкцією, бієкцією:

- | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|------------------------|
| 1) $f(x) = x + 1 $; | 2) $f(x) = x^5$; | 3) $f(x) = 3^x$; |
| 4) $f(x) = \cos 2x$; | 5) $f(x) = \frac{1}{x}, f(0) = 1$; | 6) $f(x) = x \sin x$; |
| 7) $f(x) = \ln x - 1 , f(1) = 0$. | | |

б) Як можна визначити множини X і Y , щоб функції $f : X \rightarrow Y$, задані цими ж формулами, були бієкціями?

1.85. Нехай $f(x) = \cos x$. Знайти:

- а) $f(\{0\})$, $f(\{0; 2\pi\})$, $f((0; 2\pi))$, $f([\pi/2; 3\pi/2])$;
 б) $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}((-1; 2))$, $f^{-1}([0; 2))$, $f^{-1}([0; 1/2])$.

1.86. Множина X містить m елементів, а множина Y — n елементів. Скільки існує різних: 1) функцій; 2) ін'єкцій; 3) бієкцій $f : X \rightarrow Y$?

1.87. Навести приклад множини X і відображення $f : X \rightarrow X$ таких, що f — сюр'єкція, але не ін'єкція?

1.88. Чи існує скінченна множина X , для якої виконуються умови попередньої задачі?

1.89. Чи є функція $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, $f((m; n)) = \max\{m; n\}$, сюр'єкцією або ін'єкцією?

1.4. Потужність множин. Дійсні числа

Потужність множин. Множина називається *скінченною*, якщо вона містить скінченну кількість елементів. У протилежному випадку множина називається *нескінченною*.

Множини A та B називаються *еквівалентними*, або *рівнопотужними* ($A \sim B$), якщо існує бієктивне відображення множини A в множину B .

Множина A називається *зліченною*, або *зчисленною*, якщо A рівнопотужна множині натуральних чисел $\mathbb{N}$, тобто $A \sim \mathbb{N}$.

Множина A називається *множиною потужності континуум*, якщо A еквівалентна множині точок відрізка $[0; 1]$, тобто $A \sim [0; 1]$.

Приклади розв'язування вправ

1. Довести, що будь-яка нескінченна множина A містить зліченну підмножину.

Розв'язування. Візьмемо довільний елемент множини A і позначимо його через a_1 . Оскільки множина A нескінченна, то множина $A_1 = A \setminus \{a_1\}$ також нескінченна. Беремо довільний елемент $a_2 \in A_1$ і зауважимо, що множина $A_2 = A_1 \setminus \{a_2\}$ також нескінченна. Продовжуючи цей процес, отримаємо зліченну множину.

2. Довести, що множини

а) $E = (a, b)$, $-\infty < a < b < +\infty$ та

б) $E = \mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$ мають потужність континуум.

Розв'язування. а) Позначимо через E_1 та E_2 наступні множини:

$E_1 = \{0; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{n}; \dots\}$ та $E_2 = \{a + \frac{b-a}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$. Множини E_1 та E_2 є зліченими, отже $E_1 \sim E_2$. Оскільки відображення $y = a + (b-a)x$ встановлює бієктивну відповідність між множиною $([0; 1] \setminus E_1)$ та множиною $((a; b) \setminus E_2)$, то множина $(a; b)$ еквівалентна відрізку $[0; 1]$, що і потрібно було довести.

б) За вправою а) маємо $[0; 1] \sim (0; 1)$. Відображення $y = \operatorname{tg}(\pi(x - \frac{1}{2}))$ бієктивно відображає інтервал $(0; 1)$ на всю числову вісь $\mathbb{R}$, отже $(0; 1) \sim \mathbb{R}$. Звідки отримуємо, що $\mathbb{R} \sim [0; 1]$.

Вправи

1.90. Довести, що зліченною є множина:

- 1) непарних натуральних чисел;
- 2) чисел, обернених до натуральних;
- 3) квадратів цілих чисел.

1.91. Побудувати бієкції: а) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$; б) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$.

1.92. Подати множину $\mathbb{N}$ у вигляді зліченного об'єднання злічених множин, які попарно не перетинаються.

1.93. Довести, що довільна сукупність відрізків довжини 1 на дійсній прямій, які попарно не перетинаються, не більш як зліченна.

1.94. Множина $A \subset \mathbb{R}$ така, що відстань між двома довільними її елементами не менша 1. Довести, що ця множина не більш як зліченна.

1.95. Нехай A — нескінченна множина і a — довільний елемент, $a \notin A$. Довести, що $A \sim A \cup \{a\}$.

1.96. Множина A — нескінченна, а множина B — зліченна і $A \cap B = \emptyset$. Довести, що $A \sim A \cup B$.

1.97. Нехай $f: X \rightarrow Y$ — сюр'єкція. Довести, що якщо X — зліченна множина, то Y — не більш як зліченна.

1.98. Довести, що множина $[0; 1]$ рівнопотужна множині: 1) $(0; 1)$; 2) $[0; 1] \setminus \mathbb{Q}$; 3) $[a; b]$, $a < b$; 4) $[a; b)$, $a < b$; 5) $\mathbb{R}$.

1.99. З аксіом множини дійсних чисел вивести справедливості наступних властивостей:

- | | |
|--|---|
| 1) $\forall a \in \mathbb{R}: \exists! (-a) \in \mathbb{R};$ | 2) $\exists! 1 \in \mathbb{R};$ |
| 3) $\forall a \in \mathbb{R}: a \cdot 0 = 0;$ | 4) $\forall a, b \in \mathbb{R}: a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0;$ |
| 5) $\forall a \in \mathbb{R}: (-1) \cdot a = -a;$ | 6) $\forall a \in \mathbb{R}: 0 < a \Rightarrow -a < 0;$ |
| 7) $0 < 1.$ | |

1.100. Довести, що не існує числа $x \in \mathbb{Q}$, для якого:

- | | | |
|---------------|---------------|-----------------------|
| 1) $x^2 = 2;$ | 2) $x^3 = 3;$ | 3) $x^6 + x - 1 = 0.$ |
|---------------|---------------|-----------------------|

1.101. Довести, що не існує числа $x \in \mathbb{Q}$, для якого:

- | | | |
|----------------|----------------|-----------------|
| 1) $10^x = 2;$ | 2) $10^x = 3;$ | 3) $10^x = 15.$ |
|----------------|----------------|-----------------|

1.5. Верхня і нижня межа множини

Означення. Найменше з чисел, що обмежує множину $E \subset \mathbb{R}$ зверху, називається *точною верхньою межею* множини E , і позначається $\sup E$. Отже,

$$M = \sup E \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} 1) (\forall x \in E) \{x \leq M\}; \\ 2) (\forall \varepsilon > 0)(\exists x^* \in E) \{x^* > M - \varepsilon\}. \end{array} \right.$$

Найбільше з чисел, що обмежує множину $E \subset \mathbb{R}$ знизу, називається *точною нижньою межею* множини E , і позначається $\inf E$. Отже,

$$m = \inf E \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} 1) (\forall x \in E) \{x \geq m\}; \\ 2) (\forall \varepsilon > 0)(\exists x^* \in E) \{x^* < m + \varepsilon\}. \end{array} \right.$$

Очевидно, якщо в множині $E \subset \mathbb{R}$ є максимальний (мінімальний) елемент a , то $a = \sup E$ ($a = \inf E$).

Приклади розв'язування вправ

1. Знайти $\max E$, $\min E$, $\sup E$, $\inf E$, якщо

$$\text{а) } E = \{n \in \mathbb{N} : -1 + \frac{1}{n}\}; \quad \text{б) } E = \{n \in \mathbb{N} : ((-1)^n + 1)n^2\}.$$

Розв'язування. а) Легко бачити, що $E = \{0; -\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}; \dots; -\frac{n}{n+1}; \dots\}$. Тому $\max E = 0$, а значить, і $\sup E = 0$. З іншого боку, $\min E$ — не існує, тобто в множині E немає мінімального елементу. Оскільки множина E є обмеженою знизу, то $\inf E$ скінченний. Покажемо, що $\inf E = -1$. Дійсно, для довільного $n \in \mathbb{N}$ виконується $-\frac{n}{n+1} > -1$ і для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $n_0 = n(\varepsilon) = \max\{\lceil \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \rceil + 1; 1\}$, для якого $-\frac{n_0}{n_0+1} < -1 + \varepsilon$, тобто $n_0 > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$.

б) Легко бачити, що $E = \{0; 2 \cdot 4; 0; 2 \cdot 16; 0; 2 \cdot 36; \dots\}$. Отже, $\min E = \inf E = 0$. Очевидно, що множина E необмежена зверху. Дійсно, для довільного $K > 0$ візьмемо $n_0 = 2 \cdot \max\{1; [K]\} \in \mathbb{N}$. Тоді $((-1)^{n_0} + 1) \cdot n_0^2 = 2 \cdot 4 \cdot (\max\{1; [K]\})^2 > K$.

Вправи

1.102. Довести, що множина чисел $\left\{(-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ обмежена і не має ні найменшого, ні найбільшого елементу.

1.103. Чи має найбільший і найменший елемент множина $\{a_n = n^2 2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$.

1.104. Знайти найбільший і найменший елемент множини $\left\{a_n = \frac{3^n}{n!} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

Знайти точні грані множин:

1.105. $A = \left\{(-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\};$

1.106. $A = \left\{\frac{n}{n+3}(2 + (-1)^n) \mid n \in \mathbb{N}\right\};$

1.107. $A = \left\{\frac{mn}{4m^2 + n^2} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\};$

1.108. $A = \left\{\frac{m}{m+n} : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\right\};$

1.109. $A = \left\{\frac{m}{|m| + n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}.$

1.110. Знайти точну нижню грань множини $A = \left\{\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\right\}.$

1.111. Нехай $A \subset [0, +\infty)$ і $(\forall n \in \mathbb{N}) (\exists x \in A) : x \leq \frac{1}{n}$. Довести, що $\inf A = 0$.

1.112. Для обмежених непорожніх підмножин A і B множини $\mathbb{R}$ довести наступні нерівності:

а) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B);$ б) $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B).$

1.113. Нехай A і B — обмежені непорожні підмножини $\mathbb{R}$ і $C = \{x + y : x \in A, y \in B\}$. Довести, що $\sup C = \sup A + \sup B$.

Знайти:

1.114. $\inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{m \in \mathbb{N}} \frac{m-n}{m+n};$

1.115. $\sup_{m \in \mathbb{N}} \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{m-n}{m+n};$

1.116. $\sup_{m \in \mathbb{N}} \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{m}{m+n};$

1.117. $\inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{m \in \mathbb{N}} \frac{m}{m+n}.$

Як зв'язані точні грані обмежених множин $A \subset \mathbb{R}$ і B , якщо $A \neq \emptyset$:

1.118. $B = \{-x : x \in A\};$

1.119. $B = \{x^3 : x \in A\};$

1.120. $B = \{x^2 : x \in A\};$

1.121. $B = \{x + a : x \in A\}, a \in \mathbb{R};$

$$1.122. B = \{ax : x \in A\}, a \in \mathbb{R}.$$

1.123. Довести, що для довільних $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ справедливі наступні рівності:

$$\min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|), \quad \max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|).$$

Записати за допомогою кванторів, що:

$$1.124. \sup[1, 7] = 7; \quad \inf(1, 7) = 1; \quad 1.125. \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} = M;$$

$$1.126. \inf\{x^2 + 3 : x \in \mathbb{R}\} = 3; \quad 1.127. \sup\{\sin x : x \in \mathbb{R}\} = 1.$$

Знайти $\sup$, $\inf$, $\max$, $\min$ множин:

$$1.128. \left\{ \frac{n^2}{3n^2 + 2} : n \in \mathbb{N} \right\};$$

$$1.129. \left\{ \frac{n}{n+2} : n \in \mathbb{Z} \right\};$$

$$1.130. x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2};$$

$$1.131. x_n = n^{(-1)^n};$$

$$1.132. x_n = 1 + \sin \frac{n\pi}{2};$$

$$1.133. x_n = 1 - \frac{(-1)^n}{n}.$$

1.6. Границя послідовності. Властивості збіжних послідовностей

1. **Границя послідовності.** Число $a \in \mathbb{R}$ називатимемо *границею* числової послідовності (x_n) і позначатимемо

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \stackrel{\text{def}}{=} (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) : \{|x_n - a| < \varepsilon\}.$$

Послідовності, які мають скінченну границю називаються *збіжними*, а послідовності, границя яких дорівнює нулю — *нескінченно малими*.

Послідовності, які не мають скінченної границі, називаються *розбіжними*. Серед розбіжних послідовностей виділяють клас *нескінченно великих* послідовностей, тобто послідовність (x_n) — *нескінченно великою*, і записують

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \stackrel{\text{def}}{=} (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) : \{|x_n| > \varepsilon\}.$$

Якщо $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) : \{x_n > \varepsilon\} \left(\{x_n < -\varepsilon\} \right)$, то записують $\lim_{n \rightarrow \infty} = +\infty$ $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} = -\infty \right)$.

2. **Границя послідовності.** Послідовність (a_n) називається *обмеженою зверху (знизу)*, якщо

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) : \{x_n < M\} \left(\{x_n > M\} \right).$$

Якщо послідовність обмежена і зверху, і знизу, то послідовність називається *обмеженою*.

3. Якщо послідовність має границю, то будь-яка її підпослідовність має ту саму границю.

4. Якщо послідовність (x_n) та (y_n) мають границі відповідно a та b , то послідовності $(x_n + y_n)$, $(x_n - y_n)$, $(x_n \cdot y_n)$, $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ — мають відповідно границі $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$ та $\frac{a}{b}$ за умови, що $b \neq 0$.

Приклади розв'язування вправ

1. Користуючись означенням границі послідовності, довести, що

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1, \text{ якщо } x_n = \frac{2n-1}{2n+1}; \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{3}{5}, \text{ якщо } x_n = \frac{3n^2+1}{5n^2-1}.$$

Починаючи з якого n , виконується нерівність $|x_n - a| < 0,01$, де $a = 1$ та $a = 3/5$ відповідно?

Розв'язування. а) Нехай $\varepsilon > 0$ задале фіксоване число. Тоді

$$|x_n - 1| = \left| \frac{2n-1}{2n+1} - 1 \right| = \left| \frac{-2}{2n+1} \right| = \frac{2}{2n+1}.$$

Отже, $|x_n - 1| < \varepsilon$ виконується, якщо $\frac{2}{2n+1} < \varepsilon$, звідки $n > \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}$. Тому за n_0 можна взяти $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2} \right] + 1$. Таким чином, для $\varepsilon = \frac{1}{100}$ отримуємо $n_0 = 100$.

б) Знайдемо абсолютну величину різниці

$$\left| x_n - \frac{3}{5} \right| = \left| \frac{3n^2+1}{5n^2-1} - \frac{3}{5} \right| = \frac{8}{5(5n^2-1)}.$$

Нехай ε задано. Виберемо n так, щоб виконувалася нерівність $\frac{8}{25n^2-5} < \varepsilon$.

Розв'язуючи цю нерівність, знаходимо $n^2 > \frac{8}{25\varepsilon} + \frac{1}{5}$; $n > \frac{1}{5} \sqrt{\frac{8+5\varepsilon}{\varepsilon}}$.

Покладемо $n_0 = \left[\frac{1}{5} \sqrt{\frac{8+5\epsilon}{\epsilon}} \right] + 1$, тоді для $n > n_0$ виконується $|x_n - \frac{3}{5}| < \epsilon$, що і треба було довести. Якщо $\epsilon = 0,01$, то

$$n_0 = \left[\frac{1}{5} \sqrt{\frac{8+5 \cdot 0,01}{0,01}} \right] + 1 = \left[\frac{1}{5} \sqrt{805} \right] + 1 = 6.$$

2. Довести, що розбіжною є послідовність $x_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{якщо } n = 2k - 1, \\ \frac{n}{n+2}, & \text{якщо } n = 2k. \end{cases}$

Розв'язування. Розглянемо послідовність $x_{2k-1} = \frac{1}{2k-1}$ та $x_{2k} = \frac{2k}{2k+2}$.

Маємо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2k-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2k-1} = 0$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2k}{2k+2} = 1$, отже, за властивістю

3) послідовність (x_n) границі не має.

Вправи

1.134. Нехай $x_n = \frac{n}{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$). Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$, визначивши для кожного $\epsilon > 0$ число $N = N(\epsilon)$ таке, що $|x_n - 1| < \epsilon$, якщо $n > N$.

1.135. Довести, що x_n ($n = 1, 2, \dots$) є нескінченно мала (тобто має границю, рівну 0), вказавши для довільного $\epsilon > 0$ число $N = N(\epsilon)$ таке, що $|x_n| < \epsilon$ при $n > N$, якщо

а) $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$;

б) $x_n = \frac{2n}{n^3 + 1}$;

в) $x_n = \frac{1}{n!}$;

г) $x_n = (-1)^n \cdot 0,999^n$.

1.136. Довести, що послідовності

а) $x_n = (-1)^n n$,

б) $x_n = 2\sqrt{n}$,

в) $x_n = \lg(\lg n)$ ($n \geq 2$)

мають границю нескінченність при $n \rightarrow \infty$ (тобто є нескінченно великими), визначивши для довільного $E > 0$ число $N = N(E)$ таке, що $|x_n| > E$ при $n > N$.

1.137. Показати, що $x_n = n^{(-1)^n}$ ($n = 1, 2, \dots$) необмежена, але не є нескінченно великою при $n \rightarrow \infty$.

1.138. Довести, що послідовність $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$ не має границі, тобто перевірити, що довільне число $a \in \mathbb{R}$ не є границею цієї послідовності.

Нехай $a_n \rightarrow a$, $n \rightarrow \infty$. Знайти границю послідовності, якщо вона існує

1.139. $\{a_{n+1} - a_n : n \geq 1\};$

1.140. $\{a_n + 2a_{n+1} : n \geq 1\};$

1.141. $\{|a_n| : n \geq 1\};$

1.142. $\{a_n a_{n+1} : n \geq 1\};$

1.143. $\{(a_{n+1} - a_n)^n : n \geq 1\};$

1.144. $\{\max(a_n, a_{n+1}) : n \geq 1\};$

1.145. $\{|a_n| : n \geq 1\};$

1.146. $\{\operatorname{sign} a_n : n \geq 1\}.$

1.147. Послідовність $\{a_n : n \geq 1\}$ додатніх чисел така, що $a_n - a_{n-1} \rightarrow 2, n \rightarrow \infty$. Довести, що $a_n \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$.

1.148. Послідовність $\{a_n : n \geq 1\}$ додатніх чисел така, що $a_n^2 - a_n \rightarrow 2, n \rightarrow \infty$. Довести, що $a_n \rightarrow 2, n \rightarrow \infty$.

Обчислити границі послідовностей:

1.149. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10000n}{n^2 + 1};$

1.150. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n});$

1.151. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + n} - 1}{n + 2};$

1.152. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 1} + n)^2}{\sqrt[3]{n^3 + 1}};$

1.153. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n + 1};$

1.154. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}};$

1.155. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^2 + 5n} - \sqrt[3]{n^2 + n}) \sqrt[3]{n + 3};$

1.156. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=2}^n \frac{i-1}{n^2};$

1.157. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1} i}{n} \right|;$

1.158. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=2}^n \frac{(i-1)^2}{n^3};$

1.159. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)};$

1.160. $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \sqrt[3]{2};$

1.161. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n + 2} - \frac{n}{2} \right);$

1.162. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!};$

1.163. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - 2 + 3 - 4 + \dots - 2n}{\sqrt{n^2 + 1}} \right);$

1.164. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{2i-1}{2^i};$

1.165. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n a^i}{\sum_{i=1}^n b^i} \quad (|a| < 1, |b| < 1);$

1.166. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{(2i-1)^2}{n^3}.$

1.7. Обчислення границь послідовностей

1. Арифметичні властивості границь. Якщо послідовності (x_n) та (y_n) збіжні, то

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0).$$

2. Теорема про три послідовності. Якщо члени послідовностей задовольняють умову $x_n \leq y_n \leq z_n$ ($n \in \mathbb{N}$) і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$.

Приклади розв'язування вправ

1. Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

Розв'язування. Маємо

$$x_n = 0 \leq \frac{2^n}{n!} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2}{n} \leq 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = z_n.$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{9}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \right) = \frac{9}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0,$$

то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$. (див. 2).

2. Обчислити а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n+5^n}{n+5^{n+1}}$.

Розв'язування. а) Оскільки $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

б) Враховуючи, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{5^n} = 0$, отримуємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n+5^n}{n+5^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{3}{5}\right)^n}{5 + \frac{n}{5^n}} = \frac{1}{5}.$$

Вправи

Довести наступні рівності:

$$1.167. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0;$$

$$1.168. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad (a > 1);$$

$$1.169. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0;$$

$$1.170. \lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0, \text{ якщо } |q| < 1;$$

$$1.171. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 1);$$

$$1.172. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0 \quad (a > 1);$$

$$1.173. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1;$$

$$1.174. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

1.175. Для числа $a \in \mathbb{R}$ послідовність $\{a_n : n \geq 1\}$ визначається наступними співвідношеннями: $a_1 = a$; $a_{n+1} = \frac{n+1}{n}a_n + \frac{1}{n}$, $n \geq 1$. Визначити значення a , при яких послідовність збігається.

Обчислити границю послідовності $\{a_n : n \geq 1\}$ в наступних випадках:

$$1.176. a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)};$$

$$1.177. a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-1)(3k+2)};$$

$$1.178. a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)};$$

$$1.179. a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(2k-1)^2(2k+1)^2};$$

$$1.180. a_n = \sum_{k=1}^n k2^{-k};$$

$$1.181. a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k(k+1).$$

Обчислити наступні границі:

$$1.182. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} + 1}{an + \sqrt{n} + 2};$$

$$1.183. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+a) - \sqrt{n^4 + bn^3 + 1}}{n+5};$$

$$1.184. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n + a\sqrt{n} + 1} - \sqrt{n});$$

$$1.185. \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[n]{\frac{n+a}{n+1}} - \sqrt[n]{\frac{n+b}{n-1}} \right);$$

$$1.186. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1^{10} + 2^{10} + \dots + n^{10}};$$

$$1.187. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{(n+a)^2} - n);$$

$$1.188. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 5^n};$$

$$1.189. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n};$$

$$1.190. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 5^n};$$

$$1.191. \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}};$$

$$1.192. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!};$$

$$1.193. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1! + 2! + \dots + n!};$$

$$1.194. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}};$$

$$1.195. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}.$$

1.8. Монотонні послідовності. Критерій Коші

1. Монотонні послідовності. Послідовність (x_n) називається зростаючою (спадною), якщо для довільного $n \in \mathbb{N}$ виконується $x_n < x_{n+1}$ ($x_n > x_{n+1}$). Зростаючі та спадні послідовності називаються *монотонними*.

2. Границя монотонної послідовності. Якщо послідовність (x_n) — зростаюча (спадна) і обмежена зверху (знизу), то (x_n) має скінченну границю, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup x_n$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf x_n$).

Якщо послідовність (x_n) — зростаюча (спадна) і необмежена зверху (знизу), то границя цієї послідовності дорівнює $+\infty$ ($-\infty$).

3. Критерій Коші. Послідовність (x_n) є збіжною, тоді й лише тоді, коли (x_n) задовольняє умову Коші:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N}) : \{|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon\}.$$

Приклади розв'язування вправ

1. Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, де $a > 1$.

Розв'язування. Очевидно, що

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{n+1} \leq 1$$

для $n \geq n_0$, отже послідовність $x_n = \frac{a^n}{n!}$ є спадною, починаючи з $n = n_0$. Оскільки $x_n > 0$ для $n \in \mathbb{N}$, то послідовність (x_n) — обмежена знизу, а значить, (x_n) має границю. Позначимо цю границю через q , тобто $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!}$; і знайдемо її. Зауважимо, що $x_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a^n}{n!} \cdot \frac{a}{n+1} = x_n \cdot \frac{a}{n+1}$. Звідси, враховуючи, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} = 0$, отримуємо $q = q \cdot 0$. Отже, $q = 0$, що і треба було довести.

2. Довести збіжність послідовності $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$.

Розв'язування.

$x_{n+1} - x_n = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, тобто послідовність є зростаючою. Покажемо, що (x_n) обмежена зверху.

Дійсно, для $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2. \end{aligned}$$

Отже, за теоремою про границю монотонної послідовності отримуємо, що послідовність (x_n) збіжна.

3. Використовуючи критерій Коші, довести збіжність послідовності

$$x_n = \frac{\cos 1!}{3} + \frac{\cos 2!}{3^2} + \dots + \frac{\cos n!}{3^n}.$$

Розв'язування. Нехай $\varepsilon > 0$ — задане фіксоване число. За критерієм Коші ($n, p \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \left| \left(\frac{\cos 1!}{3} + \dots + \frac{\cos n!}{3^n} + \dots + \frac{\cos(n+p)!}{3^{n+p}} \right) - \left(\frac{\cos 1!}{3} + \dots + \frac{\cos n!}{3^n} \right) \right| = \\ &= \left| \frac{\cos(n+1)!}{3^{n+1}} + \dots + \frac{\cos(n+p)!}{3^{n+p}} \right| \leq \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+2}} + \dots + \frac{1}{3^{n+p}} = \\ &= \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^p}{1 - \frac{1}{3}} < \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{3^n}. \end{aligned}$$

Звідси отримуємо $\frac{2}{3^n} < \varepsilon$, якщо $n > \log_3(2/\varepsilon)$. Отже, $n_0 = \max\{1; \lceil \log_3(2/\varepsilon) \rceil\}$.

Вправи

Визначити $n_0 \in \mathbb{N}$ так, щоб були монотонними наступні послідовності:

- | | |
|---|---|
| 1.196. $\{n^2 - 49n - 50 : n \geq n_0\};$ | 1.197. $\left\{n + \frac{100}{n} : n \geq n_0\right\};$ |
| 1.198. $\left\{\frac{3^n}{n^5} : n \geq n_0\right\};$ | 1.199. $\left\{\frac{n^2}{2^n} : n \geq n_0\right\};$ |
| 1.200. $\left\{\frac{n!}{n^n} : n \geq n_0\right\};$ | 1.201. $\{5^n + (-4)^n : n \geq n_0\}.$ |

1.202. Довести, що послідовність $a_1 = 9$; $a_{n+1} = (a_n - 3)^2$, $n \geq 1$, строго зростає і необмежена зверху.

1.203. Довести, що послідовність

$$\left\{a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) : n \geq 2\right\}$$

строого спадає і що $a_n \rightarrow \frac{1}{2}$, $n \rightarrow \infty$.

Довести монотонність і обмеженість послідовності $\{a_n : n \geq 1\}$, а також знайти її границю, якщо

$$1.204. a_1 = \frac{3}{2}; a_{n+1}^2 = 3a_n - 2, n \geq 1;$$

$$1.205. a_1 = a \in [0, \frac{1}{4}]; a_{n+1} = a + a_n^2, n \geq 1;$$

$$1.206. a_1 = 1; a_{n+1} = 1 - \frac{1}{4a_n}, n \geq 1;$$

$$1.207. a_1 = 0; a_{n+1} = \frac{1}{4(1-a_n)}, n \geq 1;$$

$$1.208. 0 < a_n < 1, a_n(1-a_{n+1}) > \frac{1}{4}, n \geq 1;$$

$$1.209. a_1 = 0; a_2 = \frac{1}{2}; a_{n+1} = \frac{1}{3}(1 + a_n + a_{n-1}^3), n \geq 2.$$

Використовуючи теорему про існування границі монотонної і обмеженої послідовності, довести збіжність наступних послідовностей:

$$1.210. x_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n+9}{2n-1};$$

$$1.211. x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right);$$

$$1.212. x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right);$$

$$1.213. x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \dots, x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}, \dots$$

Використовуючи критерій Коші, довести збіжність послідовностей:

$$1.214. x_n = a_0 + a_1 q + \dots + a_n q^n, \text{ де } |a_n| < M (k = 0, 1, 2, \dots) \text{ і } |q| < 1;$$

$$1.215. x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{2^k};$$

$$1.216. x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\cos k!}{k(k+1)}.$$

1.217. Сформулювати заперечення до критерію Коші.

1.218. Використовуючи критерій Коші, довести розбіжність послідовності

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

1.9. Верхня та нижня границі послідовності

1. Часткова границя. Точка $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\overline{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ називається частковою границею послідовності (x_n) , якщо існує підпослідовність $(x_{n_k}) \subset (x_n)$ така, що $x_{n_k} \rightarrow a$, $k \rightarrow +\infty$.

2. Верхня та нижня границі послідовності. Найбільша (найменша) в $\overline{\mathbb{R}}$ часткова границя послідовності (x_n) називається *верхньою* (*нижньою*) границею (x_n) і позначається $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ ($\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$).

Для того, щоб послідовність (x_n) мала границю, необхідно і досить, щоб

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

3. Необхідні та достатні умови. Нехай $a \in \mathbb{R}$. Тоді

$$a = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \Leftrightarrow \begin{cases} 1) (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) : \{x_n < a + \varepsilon\}; \\ 2) (\forall \varepsilon > 0)(\forall M \in \mathbb{N})(\exists m \geq M) : \{x_m > a - \varepsilon\}. \end{cases}$$

$$b = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \Leftrightarrow \begin{cases} 1) (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) : \{x_n > b - \varepsilon\}; \\ 2) (\forall \varepsilon > 0)(\forall M \in \mathbb{N})(\exists m \geq M) : \{x_m < b + \varepsilon\}. \end{cases}$$

Приклади розв'язування вправ

1. Визначити множину A всіх часткових границь послідовності:

$$a) x_n = \cos \frac{\pi n}{2}; \quad б) y_n = \frac{1+(-1)^n}{2} \cdot n^2.$$

Розв'язування. а) Розглянемо підпослідовності (x_{4k}) , (x_{4k-1}) , (x_{4k-2}) , (x_{4k-3}) .

Зауважимо, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{4k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos(2\pi k) = \lim_{k \rightarrow \infty} 1 = 1;$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{4k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos(2\pi k - \frac{\pi}{2}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi}{2} = 0;$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{4k-2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos(2\pi k - \pi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos \pi = -1;$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{4k-3} = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos(2\pi k - \frac{3\pi}{2}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos \frac{3\pi}{2} = 0.$$

Отже, $A = \{-1; 0; 1\}$. Інших часткових границь не існує, бо розглянуті підпослідовності вичерпують всю нашу послідовність. Очевидно, що $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \max A = 1$, а $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \min A = -1$.

б) Зауважимо, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 + (-1)^{2k}}{2} \cdot (2k)^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} 4k^2 = +\infty;$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 + (-1)^{2k-1}}{2} \cdot (2k-1)^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Отже, $A = \{0; +\infty\}$, а значить, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.

Вправи

Знайти найбільший член послідовності x_n , якщо:

$$1.219. x_n = \frac{n^2}{2^n}; \quad 1.220. x_n = \frac{\sqrt{n}}{100 + n}; \quad 1.221. \text{ в) } x_n = \frac{1000^n}{n!}.$$

Знайти найменший член послідовності x_n , якщо:

$$1.222. x_n = n^2 - 9n - 100; \quad 1.223. x_n = n + \frac{100}{n}.$$

Визначити множину A всіх часткових границь наступних послідовностей:

$$1.224. \left\{ \frac{1}{n} : n \geq 1 \right\};$$

$$1.225. \{(-1)^n : n \geq 1\};$$

$$1.226. \left\{ \frac{2(-1)^n n + 3}{n + 1} : n \geq 1 \right\};$$

$$1.227. \left\{ \frac{1}{n} + \sin \frac{\pi n}{3} : n \geq 1 \right\};$$

$$1.228. \left\{ (2^{n(-1)^n} + 3^{n(-1)^{n+1}})^{\frac{1}{n}} : n \geq 1 \right\};$$

$$1.229. \left\{ \frac{2 + (-1)^{\lfloor \lg n \rfloor}}{2 + (-1)^n} : n \geq 1 \right\};$$

$$1.230. \left\{ \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)^n : n \geq 1 \right\};$$

$$1.231. \{\sin(\pi n \tau) : n \geq 1\}, \tau \in \mathbb{Q}.$$

1.232. Побудувати приклад послідовності, для якої множина всіх часткових границь є $\left\{ \frac{1}{n} : n \geq 1 \right\} \cup \{0\}$.

Довести, що кожна з наступних множин не може бути множиною всіх часткових границь послідовності:

$$1.233. \left\{ \frac{1}{n} : n \geq 1 \right\};$$

$$1.234. (0, 1);$$

$$1.235. \mathbb{Q};$$

$$1.236. \mathbb{R}.$$

Для послідовності x_n ($n = 1, 2, \dots$) знайти $\inf x_n$, $\sup x_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, якщо:

$$1.237. x_n = 1 - \frac{1}{n};$$

$$1.238. x_n = (-1)^{n-1} \left(2 + \frac{2}{n} \right);$$

$$1.239. x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2};$$

$$1.240. x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{\pi n}{2};$$

$$\begin{aligned}
 1.241. x_n &= 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}; & 1.242. x_n &= \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3}; \\
 1.243. x_n &= (-1)^n n; & 1.244. x_n &= -n(2 + (-1)^n); \\
 1.245. x_n &= n^{(-1)^n}; & 1.246. x_n &= 1 + n \sin \frac{\pi n}{2}.
 \end{aligned}$$

Знайти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ і $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, якщо:

$$\begin{aligned}
 1.247. x_n &= \frac{n^2}{1+n^2} \cos \frac{2n\pi}{3}; & 1.248. x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \sin \frac{n\pi}{4}; \\
 1.249. x_n &= \frac{n}{n+1} \sin^2 \frac{n\pi}{4}; & 1.250. x_n &= \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}; \\
 1.251. x_n &= \cos^n \frac{2n\pi}{3}; & 1.252. x_n &= \frac{1}{n - 10,2}.
 \end{aligned}$$

1.253. Побудувати приклад числової послідовності, частковими границями якої є числа $a_1, a_2, \dots, a_p$.

1.254. Побудувати приклад числової послідовності, для якої всі члени даної числової послідовності $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ є частковими границями. Які ще часткові границі обов'язково має побудована послідовність.

1.255. Побудувати приклад послідовності:

- а) що не має скінченних часткових границь;
- б) що має єдину часткову границю, але не є збіжною;
- в) що має нескінченну кількість часткових границь;
- г) що має в якості своєї часткової границі всі дійсні числа.

1.256. Нехай послідовність x_n збіжна, а послідовність y_n розбіжна. Що можна сказати про збіжність послідовностей $x_n + y_n$ та $x_n y_n$.

1.257. Нехай послідовності x_n і y_n розбіжні. Чи можна стверджувати, що послідовності $x_n + y_n$ та $x_n y_n$ також розбіжні.

1.258. Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, і y_n — довільна послідовність. Чи вірно, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$?

1.259. Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$. Чи випливає звідси, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, чи $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$?

Розділ 2

Границя функції. Неперервність

2.1. Границя функції в точці

1. Означення границі функції в точці на мові околів. Точка $A \in \bar{\mathbb{R}}$ називається границею функції в точці a ($a = x_0 \in \mathbb{R} \vee a = +\infty \vee a = -\infty \vee a = x_0 + 0 \vee a = a = x_0 - 0$), якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a)) : \{f(x) \in U_\varepsilon(A)\}.$$

Приклади розв'язування вправ

1. З допомогою $\varepsilon - \delta$ міркувань довести, що

а) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = 2;$

б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$

Розв'язування. а) Нехай $\varepsilon > 0$ — задане фіксоване число. Візьмемо $\delta = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{3}; 1 \right\}$ і $x \in U_\delta(1)$. Тоді $0 < x < 2$, і ми маємо

$|(x^2 + 1) - 2| = |x^2 - 1| = |x - 1| \cdot |x + 1| < 3|x - 1| < 3\delta < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$,
що і треба було довести.

б) Нехай $\varepsilon > 0$ — задане фіксоване число. Нам потрібно знайти $\delta > 0$ таке, щоб для $|x| > \delta$ виконувалось $\left| \frac{1}{x^2} - 0 \right| < \varepsilon$. Звідси отримуємо, що $|x| > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$, тобто можемо покласти $\delta = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$.

2. Сформулювати за допомогою нерівностей такі твердження:

а) $\lim_{x \rightarrow 5+0} f(x) = -\infty;$ б) $f(x) \rightarrow 1 - 0$, якщо $x \rightarrow +\infty$.

Розв'язування. а) Оскільки $U_\delta(5+0) = \{x : 5 < x < 5 + \delta\}$ і $U_\varepsilon(-\infty) = \{x : -\infty < x < -\varepsilon\}$, то ми отримуємо

$$\lim_{x \rightarrow 5+0} f(x) = -\infty \stackrel{\text{def}}{=} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, 5 < x < 5 + \delta) : \{f(x) < -\varepsilon\}.$$

б) Аналогічно

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 - 0 \stackrel{\text{def}}{=} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, x > \delta) : \{1 - \varepsilon < f(x) < 1\}.$$

Вправи

З допомогою $\varepsilon - \delta$ міркувань довести, що:

$$2.1. \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4; \quad 2.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty;$$

$$2.3. \lim_{x \rightarrow -1} x^3 = -1; \quad 2.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Сформулювати з допомогою нерівностей такі твердження:

$$\begin{array}{lll} 2.5. \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b; & 2.6. \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b; & 2.7. \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b; \\ 2.8. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b; & 2.9. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b; & 2.10. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty; \\ 2.11. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty; & 2.12. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty; & 2.13. \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty; \\ 2.14. \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty; & 2.15. \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty; & 2.16. \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty; \\ 2.17. \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty; & 2.18. \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty; & 2.19. \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty; \\ 2.20. \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty; & 2.21. \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty; & 2.22. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty; \\ 2.23. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; & 2.24. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; & 2.25. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty; \\ 2.26. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty; & 2.27. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty. & \end{array}$$

Нехай $y = f(x)$. З допомогою нерівностей сформулювати, що означає:

$$\begin{array}{ll} 2.28. y \rightarrow b - 0, \text{ якщо } x \rightarrow a; & 2.29. y \rightarrow b - 0, \text{ якщо } x \rightarrow a - 0; \\ 2.30. y \rightarrow b - 0, \text{ якщо } x \rightarrow a + 0; & 2.31. y \rightarrow b - 0, \text{ якщо } x \rightarrow \infty; \\ 2.32. y \rightarrow b - 0, \text{ якщо } x \rightarrow -\infty; & 2.33. y \rightarrow b - 0, \text{ якщо } x \rightarrow +\infty; \\ 2.34. y \rightarrow b + 0, \text{ якщо } x \rightarrow a; & 2.35. y \rightarrow b + 0, \text{ якщо } x \rightarrow a - 0; \\ 2.36. y \rightarrow b + 0, \text{ якщо } x \rightarrow a + 0; & 2.37. y \rightarrow b + 0, \text{ якщо } x \rightarrow \infty; \\ 2.38. y \rightarrow b + 0, \text{ якщо } x \rightarrow -\infty; & 2.39. y \rightarrow b + 0, \text{ якщо } x \rightarrow +\infty. \end{array}$$

2.40. Нехай $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, $a_0 \neq 0$.

Довести, що $\lim_{x \rightarrow \infty} |p(x)| = +\infty$.

2.41. Нехай $R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$.

Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} R(x)$.

2.42. Знайти: а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$.

Обчислити:

$$2.43. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x};$$

$$2.44. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5};$$

$$2.45. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}, n, m \in \mathbb{N};$$

$$2.46. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6};$$

$$2.47. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}};$$

$$2.48. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15};$$

$$2.49. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3};$$

$$2.50. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3};$$

$$2.51. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16};$$

$$2.52. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}};$$

$$2.53. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1};$$

$$2.54. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1};$$

$$2.55. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1};$$

$$2.56. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}, n, m \in \mathbb{N};$$

$$2.57. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}.$$

2.58. Чи існують границі: а) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left[\frac{1}{x} \right]$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3} \cdot \left[\frac{2}{x} \right]$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x]}{x}$.

2.2. Обчислення границь функцій

При обчисленні границь $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ у випадку невизначеностей $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$, за допомогою алгебраїчних перетворень виділяють у чисельнику та знаменнику множники вигляду $(x-a)$ чи x^a і використовують теореми про границі суми, добутку та частки функцій.

Приклади розв'язування вправ

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x + 3}{3x + 5} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 2x + 3)}{\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 5)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^3 - 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 3}{3 \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 5} = \frac{2^3 - 2 \cdot 2 + 3}{3 \cdot 2 + 5} = \frac{7}{11}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x-1)}{(x-4)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-1}{x+4} = \frac{4-1}{4+4} = \frac{3}{8}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1-4}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{\sqrt{3x+1}+2} = \frac{3}{(\sqrt{3+1}+2)} = \frac{3}{4}.$$

Вправи

Обчислити границі:

$$2.59. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{7-x}}{x-4};$$

$$2.61. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - 2}{x^2 - 3x + 2};$$

$$2.63. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1+2x}}{x+x^2};$$

$$2.65. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2} - 1}{x^2 + x^3};$$

$$2.67. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2};$$

$$2.69. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x};$$

$$2.60. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2} - \sqrt{6-x}};$$

$$2.62. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{x^2};$$

$$2.64. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2};$$

$$2.66. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2x}};$$

$$2.68. \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1} - x);$$

$$2.70. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}).$$

Знайти границі:

$$2.71. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1}};$$

$$2.73. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2};$$

$$2.75. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad (a > 0);$$

$$2.77. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8};$$

$$2.79. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2};$$

$$2.72. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}};$$

$$2.74. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}};$$

$$2.76. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9};$$

$$2.78. \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4};$$

$$2.80. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} \quad (n \in \mathbb{Z});$$

$$\checkmark 2.81. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2} - (1+x)}{x};$$

$$\checkmark 2.83. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x + 2\sqrt[3]{x^4}};$$

$$2.85. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-\sqrt{x}} - \frac{3}{1-\sqrt[3]{x}} \right);$$

$$\checkmark 2.82. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2} - 2}{x^2+x};$$

$$\checkmark 2.84. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}};$$

$$2.86. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt{x+9} - 2}.$$

Знайти границі:

$$2.87. \lim_{x \rightarrow +\infty} x (\sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x} + x);$$

$$2.88. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x);$$

$$2.89. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x});$$

$$2.90. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x}) \dots (1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}};$$

$$2.91. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt{x^2-2x});$$

$$2.92. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3+x^2+1} - \sqrt[3]{x^3-x^2+1});$$

$$2.93. \lim_{x \rightarrow +0} \left(\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}} \right).$$

4. Знайти границі:

$$2.94. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x});$$

$$2.95. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3});$$

$$2.96. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x} - \sqrt{x+3});$$

$$2.97. \lim_{x \rightarrow +\infty} x (\sqrt{x^2+x} - x - \frac{1}{2});$$

$$2.98. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x-\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}).$$

2.3. Обчислення границь з використанням чудових границь

При обчисленні границь будемо використовувати чудові границі

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

та наступні співвідношення, що випливають з них:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &\sim x, & x &\rightarrow 0, & 1 - \cos x &\sim \frac{x^2}{2}, & x &\rightarrow 0, \\ \arcsin x &\sim x, & x &\rightarrow 0, & \operatorname{arctg} x &\sim x, & x &\rightarrow 0, \\ a^x - 1 &\sim x \ln a, & x &\rightarrow 0, & (1+x)^\alpha - 1 &\sim \alpha x, & x &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Приклади розв'язування вправ

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{4x}{3x} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} = \frac{1}{3}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{2(\pi - x)} = \left| \begin{array}{l} t = \pi - x, \\ x = \pi - t, \\ x \rightarrow \pi, \quad t \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 3(\pi - t)}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 3t}{2t} = \frac{3}{2} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{3t} = \frac{3}{2}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x - \cos 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x \cos x}{2 \sin 2x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\sin x} = \infty.$$

$$\begin{aligned} 4. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sec x - \sec a}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\cos a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos a - \cos x}{\cos x \cos a (x - a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{2 \cdot \frac{x-a}{2} \cos x \cos a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \frac{x+a}{2}}{\cos x \cos a} = \frac{\sin a}{\cos^2 a}. \end{aligned}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{\cos \frac{1}{x}} - 1}{\operatorname{tg} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{2x^2}\right)^{\frac{1}{3}} - 1}{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2x^2}}{\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{6}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{x^2} - 1 + \sqrt[3]{x^2}}{\operatorname{arctg} x^2 \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \ln 2 + x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^{\frac{1}{3}} \ln 2) = 1.$$

Вправи

Знайти границі

$$\checkmark 2.99. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x};$$

$$2.101. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}, \quad n, m \in \mathbb{N};$$

$$\checkmark 2.100. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x};$$

$$\checkmark 2.102. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2};$$

$$2.103. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x};$$

$$2.105. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x};$$

$$2.107. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2};$$

$$2.109. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2};$$

$$2.111. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a};$$

$$2.113. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} a}{x - a};$$

$$2.115. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{cosec} x - \operatorname{cosec} a}{x - a};$$

Знайти границі

$$2.116. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1};$$

$$2.118. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x};$$

$$2.120. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (x - \frac{\pi}{2}) \operatorname{tg} x;$$

$$2.122. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{\sin 5x};$$

$$2.124. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(h+x) - \sin(h-x)}{x};$$

$$2.126. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{5x^2};$$

$$2.128. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{3x};$$

$$2.130. \lim_{x \rightarrow 0} 5x \operatorname{ctg} 5x;$$

$$2.132. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x}{7x};$$

$$2.134. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \operatorname{ctg}^2 3x}{\sin 9x};$$

$$2.136. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{\operatorname{tg}^2 3x};$$

$$2.104. \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x;$$

$$2.106. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x};$$

$$2.108. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right);$$

$$2.110. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a};$$

$$2.112. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a};$$

$$2.114. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sec x - \sec a}{x - a};$$

$$2.117. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x \right);$$

$$2.119. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{x^2};$$

$$2.121. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1};$$

$$2.123. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x};$$

$$2.125. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + x \sin x}{\sin^2 x};$$

$$2.127. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{x^2};$$

$$2.129. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x};$$

$$2.131. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \operatorname{tg} 5x}{\sin 6x};$$

$$2.133. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{8x^4};$$

$$2.135. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg}^2 4x}{\sin^3 11x};$$

$$2.137. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{3x};$$

$$2.138. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{arctg}^2 x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1};$$

$$2.139. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 4x}{\operatorname{arctg}^2 5x};$$

$$+ 2.140. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x + 1} - 1}{2x};$$

$$2.141. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sqrt{\operatorname{arctg}^2 x + 4} - 4};$$

$$2.142. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(2x \operatorname{tg} x - \frac{\pi}{\cos x} \right);$$

$$2.143. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x};$$

$$2.144. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{\pi} - \sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}};$$

$$+ 2.145. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x + 1} - 1}{\arcsin 3x}.$$

Знайти границі

$$2.146. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2};$$

$$2.147. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+2x) - 2\cos(a+x) + \cos a}{x^2};$$

$$2.148. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+2x) - 2\operatorname{tg}(a+x) + \operatorname{tg} a}{x^2};$$

$$2.149. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg}(a+2x) - 2\operatorname{ctg}(a+x) + \operatorname{ctg} a}{x^2};$$

$$2.150. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x)\sin(a+2x) + \sin^2 a}{x};$$

$$2.151. \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1};$$

$$2.152. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tg}(a-x)}.$$

Обчислити

$$2.153. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x};$$

$$2.154. \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)}{1 - 2\cos x};$$

$$2.155. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x) - \operatorname{tg}^2 a}{x^2};$$

$$2.156. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \operatorname{ctg}^3 x}{2 - \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^3 x};$$

$$2.157. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3};$$

$$2.158. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}};$$

$$2.159. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x};$$

$$2.160. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}};$$

$$2.161. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2};$$

$$2.162. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{1+x} - \sin \sqrt{x});$$

$$2.163. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \sin 2x)}{x^2};$$

$$2.164. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos^2 2x \cos^3 3x}{x^2}.$$

Обчислити

$$2.165. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1});$$

$$2.166. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + n});$$

$$2.167. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + 2n}).$$

2.4. Обчислення границь з використанням числа Ейлера

З чудової границі $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ випливають співвідношення:

$$a) \lim_{x \rightarrow a} (1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e, \text{ де } \alpha(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow a;$$

$$b) \ln(1+x) \sim x, x \rightarrow 0,$$

які ми будемо використовувати при обчисленні границь.

Приклади розв'язування вправ

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1-3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left((1 + (-3x))^{-\frac{1}{3x}} \right)^{-3} = e^{-3}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-4} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{x-4} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{7}{x-4} \right)^{\frac{x-4}{7}} \right)^{\frac{7x}{x-4}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x}{x-4}} = e^7.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+(x-1))}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+(x-1))}{x-1} = \frac{1}{2}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + \ln(1+\frac{1}{e^{3x}})}{2x + \ln(1+\frac{1}{e^{2x}})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}.$$

Вправи

Знайти

$$2.168. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}; \quad 2.169. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}; \quad 2.170. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}.$$

Обчислити

$$2.171. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2};$$

$$2.172. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^2}{1-x}};$$

$$2.173. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^x;$$

$$2.174. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^{mx};$$

$$2.175. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^n \frac{2\pi n}{3n+1};$$

$$2.177. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}};$$

$$2.179. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 3x - 2} \right)^{\frac{1}{x}};$$

$$2.181. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-b} \right)^x;$$

$$2.183. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x};$$

$$2.185. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}};$$

$$2.187. \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x-a}};$$

$$2.189. \lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x};$$

$$2.191. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} (\frac{\pi}{4} - x))^{\operatorname{ctg} x};$$

$$2.193. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{\cos \sqrt{x}};$$

$$2.195. \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}};$$

$$2.197. \lim_{x \rightarrow +\infty} x (\ln(x+1) - \ln x);$$

$$2.199. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \ln(x+1) - \sin \ln x);$$

$$2.201. \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \frac{100+x^2}{1+100x^2};$$

$$2.203. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+2^x)}{\ln(1+5^{2x})};$$

$$2.205. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{tg}(\pi/4 + ax)}{\sin bx};$$

$$2.176. \lim_{x \rightarrow \pi/4+0} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{8} + x \right) \right)^{\operatorname{tg} 2x};$$

$$2.178. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{x^2};$$

$$2.180. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1-2x};$$

$$2.182. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2} \right)^x;$$

$$2.184. \lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\operatorname{ctg} \pi x};$$

$$2.186. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin^3 x}};$$

$$2.188. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}};$$

$$2.190. \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg} x};$$

$$2.192. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x;$$

$$2.194. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^n;$$

$$+ 2.196. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x};$$

$$2.198. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a};$$

$$2.200. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)};$$

$$2.202. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{2x})};$$

$$2.204. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}{\ln(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})};$$

$$2.206. \lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{nx + \sqrt{1-n^2 x^2}}{x + \sqrt{1-x^2}};$$

$$2.207. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(nx + \sqrt{1 - n^2 x^2})}{\ln(x + \sqrt{1 - x^2})};$$

$$2.208. \lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}};$$

$$2.209. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + x2^x}{1 + x3^x} \right)^{\frac{1}{x^2}};$$

$$2.210. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \sin x \cos ax}{1 + \sin x \cos bx} \right)^{\operatorname{ctg}^3 x};$$

$$2.211. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{x};$$

$$2.212. \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right);$$

$$2.213. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) + \log(x-h) - 2 \log x}{h^2}, x > 0.$$

2.5. О-символіка

Нехай функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ визначені в $\overset{o}{U}(a)$, $a \in \bar{\mathbb{R}}$, $\beta(x) \neq 0$.

Введемо наступні означення:

$$1) \alpha(x) \sim \beta(x), x \rightarrow a \quad \left| \stackrel{\text{def}}{=} \right| \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

$$2) \alpha(x) = o(\beta(x)), x \rightarrow a \quad \left| \stackrel{\text{def}}{=} \right| \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$$

$$3) \alpha(x) = O^*(\beta(x)), x \rightarrow a \quad \left| \stackrel{\text{def}}{=} \right| \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C, C \neq 0.$$

$$4) \alpha(x) = O(\beta(x)), x \rightarrow a \quad \left| \stackrel{\text{def}}{=} \right| (\exists M > 0)(\forall x \in \overset{o}{U}(a)) : \{|\alpha(x)| \leq M|\beta(x)|\}.$$

Приклади розв'язування вправ

1. Довести, що

$$a) (x-1)^2 \sin^2 \frac{1}{x-1} = o(x-1), x \rightarrow 1;$$

$$б) \frac{x^2+1}{x+\cos x} \sim x, x \rightarrow \infty;$$

$$в) \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{x+3}} = O^*(\sqrt{x}), x \rightarrow +\infty;$$

$$г) (2x+7) \cos \frac{1}{x} = O(1), x \rightarrow 0.$$

Розв'язування. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2 \sin^2 \frac{1}{x-1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \sin^2 \frac{1}{x-1} = 0,$

бо функція $\sin^2 \frac{1}{x-1}$ є обмеженою в $\overset{o}{U}(1)$.

$$б) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{(x+\cos x)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{\cos x}{x})} = 1.$$

$$в) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{x} \sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}} = \frac{\pi}{2}.$$

г) Оскільки функція $\cos \frac{1}{x}$ є обмеженою числом 1 на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (отже і в $\overset{\circ}{U}(0)$), а функція $2x + 7 \rightarrow 7$ при $x \rightarrow 0$, то $|(2x + 7) \cos \frac{1}{x}| \leq 8$ при $x \in \overset{\circ}{U}_{\frac{1}{8}}(0)$.

2. Визначити порядок нескінченно малої функції $\beta(\alpha)$ відносно нескінченно малої величини α , якщо

$$а) \beta = \cos \alpha - \cos 2\alpha;$$

$$б) \beta = \sqrt{\sin \alpha} - \operatorname{tg} \alpha.$$

Розв'язування. а) Маємо $\beta = \cos \alpha - \cos 2\alpha = 2 \sin \frac{3\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}$.

$$\text{Звідси} \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\beta}{\alpha^2} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{3\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha^2} = \frac{3}{2},$$

отже, β — нескінченно мала другого порядку відносно α .

б) Оскільки $\sqrt{\sin \alpha} \sim \sqrt{\alpha}$, $\operatorname{tg} \alpha \sim \alpha$ при $\alpha \rightarrow 0$, то $\beta \sim \sqrt{\alpha}(1 - \sqrt{\alpha}) \sim \sqrt{\alpha}$, $\alpha \rightarrow 0$. Отже, порядок функції β дорівнює $\frac{1}{2}$.

Вправи

I. Довести, що:

$$2.214. o(o(f(x))) = o(f(x));$$

$$2.215. O(o(f(x))) = o(f(x));$$

$$2.216. o(O(f(x))) = o(f(x));$$

$$2.217. O(O(f(x))) = O(f(x));$$

$$2.218. O(f(x)) + o(f(x)) = O(f(x)).$$

II. Нехай $x \rightarrow 0$, $n > 0$. Показати, що:

$$2.219. CO(x^n) = O(x^n), C \neq 0 — \text{стала};$$

$$2.220. O(x^n) + O(x^m) = O(x^n), n < m;$$

$$2.221. O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m}).$$

III. Нехай $x \rightarrow +\infty$, $n > 0$. Показати, що:

$$2.222. CO(x^n) = O(x^n), C — \text{стала};$$

$$2.223. O(x^n) + O(x^m) = O(x^n), n > m;$$

$$2.224. O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m}).$$

IV. Нехай $x \rightarrow 0$. Довести, що:

$$+ 2.225. 2x - x^2 = O(x);$$

$$+ 2.226. x \sin \sqrt{x} = O(x^{3/2});$$

$$+ 2.227. x \sin \frac{1}{x} = O(|x|);$$

$$+ 2.228. \ln x = o\left(\frac{1}{x^a}\right), a > 0;$$

2.229. $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt[3]{x}$;

2.230. $\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = O(1)$;

2.231. $(1+x)^n = 1 + nx + o(x)$.

V. Нехай $x \rightarrow +\infty$. Довести, що:

2.232. $2x^3 - 3x^2 + 1 = O(x^3)$;

2.233. $\frac{x+1}{x^2+1} = O(\frac{1}{x})$;

2.234. $x + x^2 \sin x = O(x^2)$;

2.235. $\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} = O(\frac{1}{x^2})$;

2.236. $\ln x = o(x^a)$, $a > 0$;

2.237. $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt{x}$;

2.238. $x^p e^{-x} = o(\frac{1}{x^2})$;

2.239. $x^2 + x \ln^{100} x \sim x^2$.

VI. Довести, що для всіх досить великих x :

2.240. $x^2 + 10x + 100 < 0,001x^3$;

2.241. $\ln^{12345678} x < \sqrt[12345678]{x}$;

2.242. $x^{10} e^x < e^{2x}$.

VII. Довести, що при $x \rightarrow +\infty$:

2.243. $2x + \ln x + \sin x = O(x)$;

2.244. $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = O(x^n)$;

2.245. $x + 2^{x+1} = O(2^x)$;

2.246. $x 2^{x+1} + x^{10} + 7 = O(3^x)$;

2.247. $x \sin x + \sqrt{x} = O(x)$;

2.248. $x^2 \ln^{10} x + x = O(x^{2+a})$, $a > 0$;

2.249. $\sqrt{x^4 + 3x^3 + 1} - x^2 = O(x)$;

2.250. $2^x \ln^3 x + 1 = O(x 2^x)$;

2.251. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = O(\frac{1}{x})$;

2.252. $x^5 2^{-x} + \frac{1}{x} = O(\frac{1}{x})$;

2.253. $\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{x} + x 2^{-x} = O(\frac{1}{\ln x})$;

2.254. $\sqrt{x^2 + \sqrt{x^3 + \sqrt{x^5}}} = O(x)$;

2.255. $\ln \ln x = o(\ln x)$;

2.256. $x \ln x = o(x^{3/2})$;

2.257. $x^{\ln x} = o(e^x)$;

2.258. $x^{13} 2^{-x} = o(1/x)$;

2.259. $\sqrt{x^2 + x + 1} - x \sim \frac{1}{2}$;

2.260. $3^x + x 2^x + \ln x + 1 \sim 3^x$.

VIII. Виділити головний член вигляду Cx^n при $x \rightarrow 0$:

2.261. $2x - 3x^3 + x^5$;

2.262. $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$;

2.263. $\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}$;

2.264. $\operatorname{tg} x - \sin x$.

IX. Виділити головний член вигляду $C(x-1)^n$ при $x \rightarrow 1$:

2.265. $x^3 - 3x + 2$;

2.266. $\ln x$;

2.267. $\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}$;

2.268. $e^x - e$;

2.269. $x^x - 1$.

X. Виділити головний член вигляду Cx^n при $x \rightarrow +\infty$:

2.270. $x^2 + 100x + 1000$;

2.271. $\frac{2x^5}{x^3 - 3x + 1}$;

2.272. $\sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x}$;

2.273. $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

2.6. Неперервність функції

1. Неперервність. Функція f називається *неперервною* в точці x_0 , якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Для того, щоб функція f була неперервною в точці x_0 , необхідно і досить, щоб

$$f(x_0 - 0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_0 + 0).$$

2. Точки розриву. Нехай x_0 — гранична точка області визначення функції f .

Точка x_0 називається *точкою розриву I роду*, якщо існують скінченні

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \text{ і } \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x).$$

Величина $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ називається *стрибком* функції f у точці x_0 .

Якщо $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$, то x_0 називається *точкою усувного розриву*, тобто стрибок функції f в точці x_0 дорівнює 0.

Якщо хоча б одна з границь $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ не існує або дорівнює нескінченності, то точка x_0 називається *точкою розриву II роду*.

3. Рівномірна неперервність. Функція f називається *рівномірно неперервною* на множині E , якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in E, |x_2 - x_1| < \delta)\{|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon\}.$$

4. Теорема Кантора. Якщо f — неперервна на відрізку $[a, b]$, то f — рівномірна неперервна на $[a, b]$.

5. Неперервність оберненої функції. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна і строго монотонна на проміжку X , то існує обернена функція $x = \varphi(y)$ неперервна та строго монотонна на проміжку $f(X)$.

Приклади розв'язування вправ

1. Задані функції:

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 6, & -\infty < x \leq 2, \\ 5x + 4, & 2 < x < 3, \\ 6 - 5x, & 3 \leq x < +\infty; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \frac{|7 - 2x|}{2x - 7};$$

$$\text{в) } f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & x \neq 0, \\ A, & x = 0; \end{cases} \quad \text{г) } f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 1, & x = 0, \\ \cos \frac{1}{x}, & x < 0; \end{cases}$$

$$\text{д) } f(x) = \begin{cases} 2 \cdot 5^x, & x \leq 1, \\ 3 + \ln(x - 1), & x > 1. \end{cases}$$

Знайти точки розриву, якщо вони існують. Визначити стрибки функції в точках, де є розриви першого роду.

Розв'язування. а) Область визначення функції — вся дійсна вісь $\mathbb{R}$. На інтервалах $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$ та $(3, +\infty)$ функція неперервна, оскільки лінійна функція та квадратична функція неперервні на $\mathbb{R}$.

Знайдемо односторонні границі функції в точці $x = 2$.

$$f(2 - 0) = \lim_{x \rightarrow 2-0} (2x^2 + 6) = 14.$$

$$f(2 + 0) = \lim_{x \rightarrow 2+0} (5x + 4) = 14.$$

Значення функції в точці $x = 2$ визначається першим аналітичним виразом, тобто $f(2) = 2 \cdot 2^2 + 6 = 14$. Оскільки $f(2 - 0) = f(2 + 0) = f(2)$, то в точці $x = 2$ функція неперервна.

Розглянемо точку $x = 3$.

$$f(3 - 0) = \lim_{x \rightarrow 3-0} (5x + 4) = 19.$$

$$f(3+0) = \lim_{x \rightarrow 3+0} (6-5x) = -9.$$

Отже, в точці $x = 3$ функція має розрив першого роду, причому скачок функції в цій точці дорівнює $f(3+0) - f(3-0) = -9 - 19 = -28$.

б) Функція неперервна на $\mathbb{R} \setminus \{7/2\}$, як частка двох неперервних на $\mathbb{R}$ функцій і $2x - 7 \neq 0$ для $x \neq 7/2$. В точці $x = 7/2$ маємо

$$\lim_{x \rightarrow 7/2-0} \frac{|7-2x|}{2x-7} = \lim_{x \rightarrow 7/2-0} \frac{7-2x}{2x-7} = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 7/2+0} \frac{|7-2x|}{2x-7} = \lim_{x \rightarrow 7/2+0} \frac{2x-7}{2x-7} = 1.$$

Отже, в точці $x = 7/2$ функція має розрив першого роду, причому величина стрибка дорівнює 2.

в) Функція неперервна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. В точці $x = 0$ маємо $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0$. Отже, якщо $A = 0$, то f неперервна на $\mathbb{R}$; якщо $A \neq 0$, то в точці $x = 0$ функція f має усувний розрив.

г) Функція f неперервна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Оскільки не існує $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$, то f має в точці $x = 0$ розрив II роду. Зауважимо, що

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

д) Функція f неперервна на $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Оскільки

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (3 + \ln(x-1)) = -\infty,$$

то f має в точці $x = 1$ розрив II роду.

2. Перевірити, чи функція $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, має обернену f^{-1} , і знайти f^{-1} .

Розв'язування. Маємо $y = \frac{2x+3}{x+1} = \frac{(2x+2)+1}{x+1} = 2 + \frac{1}{x+1}$, і легко бачити, що функція спадає на $(-\infty; -1)$ від $2-0$ до $-\infty$, а на проміжку $(-1; +\infty)$ від $+\infty$ до $2+0$. Отже, обернена функція існує, визначена на $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ і неперервна на цій множині, як обернена до неперервної функції.

З рівняння $yx + y = 2x + 3$ отримуємо $x = \frac{3-y}{y-2} = f^{-1}(y)$.

3. Дослідити на рівномірну неперервність на заданих множинах функції:

а) $y = \sqrt[3]{x}$, $x \in [1; +\infty)$; б) $y = \cos x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Розв'язування. а) Нехай $\varepsilon > 0$ — задане фіксоване число. Візьмемо $\delta = 3\varepsilon$. Тоді, якщо $|x_1 - x_2| < \delta$, $x_1, x_2 \in [1; +\infty)$, отримуємо

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |\sqrt[3]{x_1} - \sqrt[3]{x_2}| = \left| \frac{(\sqrt[3]{x_1} - \sqrt[3]{x_2})(\sqrt[3]{x_1^2} + \sqrt[3]{x_1x_2} + \sqrt[3]{x_2^2})}{\sqrt[3]{x_1^2} + \sqrt[3]{x_1x_2} + \sqrt[3]{x_2^2}} \right| = \\ &= \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt[3]{x_1^2} + \sqrt[3]{x_1x_2} + \sqrt[3]{x_2^2}} < \frac{\delta}{1 + 1 + 1} = \frac{\delta}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

що доводить рівномірну неперервність функції $y = \sqrt[3]{x}$ на $[1; +\infty)$.

б) Нехай $x_n = \sqrt{2\pi n}$, $x'_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді

$$|x_n - x'_n| = \left| \frac{2\pi n - (\frac{\pi}{2} + 2\pi n)}{\sqrt{2\pi n} + \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}} \right| \leq \frac{\pi/2}{2\sqrt{2\pi n}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty,$$

а

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = |\cos(2\pi n) - \cos(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)| = 1.$$

Отже, для $\varepsilon \in (0; 1)$, яке б ми не взяли $\delta > 0$, знайдуться такі $x' \in (x_n)$ та $x'' \in (x'_n)$ такі, що $|x' - x''| < \delta$, а $|f(x') - f(x'')| = 1 > \varepsilon$. Таким чином, функція $y = \cos x^2$ не є рівномірно неперервною на $\mathbb{R}$.

Вправи

Дослідити на неперервність і зобразити графічно наступні функції:

2.274. $f(x) = |x|$;

2.275. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2, \\ A, & x = 2; \end{cases}$

2.276. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2}, & x \neq -1, \\ A, & x = -1; \end{cases}$

2.277. $f(x) = \begin{cases} \left| \frac{\sin x}{|x|} \right|, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$

2.278. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$

2.279. $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ A, & x = 0; \end{cases}$

$$2.280. f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$2.281. f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$2.282. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{1/(x-1)}}, & x \neq 1, \\ A, & x = 1; \end{cases}$$

$$2.283. f(x) = \begin{cases} x \ln x^2, & x \neq 0, \\ A, & x = 0; \end{cases}$$

$$2.284. f(x) = \operatorname{sign} x;$$

$$2.285. f(x) = [x];$$

$$2.286. f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}].$$

Визначити точки розриву функції і дослідити характер цих точок, якщо:

$$2.287. y = \frac{x}{(1+x)^2};$$

$$2.288. y = \frac{1+x}{1+x^3};$$

$$2.289. y = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 2};$$

$$2.290. y = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}};$$

$$2.291. y = \frac{x}{\sin x};$$

$$2.292. y = \sqrt{\frac{1 - \cos \pi x}{4 - x^2}};$$

$$2.293. y = \cos^2 \frac{1}{x};$$

$$2.294. y = \operatorname{sign} \left(\sin \frac{\pi}{x} \right);$$

$$2.295. y = \frac{\cos \frac{\pi}{x}}{\cos \frac{x}{\pi}};$$

$$2.296. y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x};$$

$$2.297. y = \sqrt{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{x};$$

$$2.298. y = e^{(x+1)/x};$$

$$2.299. y = \frac{1}{\ln x};$$

$$2.300. y = \frac{1}{1 - e^{x/(1-x)}}.$$

Дослідити на неперервність і намалювати ескізи графіків функцій:

$$2.301. y = \operatorname{sign}(\sin x);$$

$$2.302. y = x - [x];$$

$$2.303. y = x[x].$$

Дослідити на неперервність і вияснити характер точок розриву, якщо:

$$2.304. f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2; \end{cases}$$

$$2.305. f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ a+x, & x \geq 0; \end{cases}$$

$$2.306. f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2; \end{cases}$$

$$2.307. f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1, \\ 1, & |x| > 1; \end{cases}$$

$$2.308. f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & |x| \leq 1, \\ |x - 1|, & |x| > 1; \end{cases} \quad 2.309. f(x) = \begin{cases} \operatorname{ctg}^2 \pi x, & x \notin \mathbb{Z}, \\ 0, & x \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$2.310. f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$$

При яких значеннях a і b з $\mathbb{R}$ неперервна на $\mathbb{R}$ функція визначена формулою:

$$2.311. f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 1, \\ x^2 + x + 10, & x \geq 1; \end{cases}$$

$$2.312. f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < -1, \\ x^2 + 1, & -1 \leq x \leq 1, \\ -ax + 2b, & x > 1; \end{cases}$$

Визначити однозначні неперервні вітки обернених функцій для наступних функцій:

$$2.313. y = x^2; \quad 2.314. y = 2x - x^2; \quad 2.315. y = \frac{2x}{1 + x^2};$$

$$2.316. y = \sin x; \quad 2.317. y = \cos x; \quad 2.318. y = \operatorname{tg} x.$$

2.319. Перевірити, що функція $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ має обернену f^{-1} , і знайти f^{-1} .

2.320. Нехай $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \leq 0, \\ ax^2 - 2x, & x > 0. \end{cases}$ Знайти всі значення $a \in \mathbb{R}$, для

яких функція f має неперервну обернену f^{-1} , і знайти f^{-1} .

Дослідити на рівномірну неперервність в заданих областях наступні функції:

$$2.321. f(x) = \frac{x}{4 - x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1);$$

$$2.322. f(x) = \ln x \quad (0 < x < 1);$$

$$2.323. f(x) = \sqrt{x} \quad (1 \leq x < +\infty).$$

Для $\varepsilon > 0$ знайти $\delta = \delta(\varepsilon)$, що задовольняє умови рівномірної неперервності для функцій $f(x)$ на даному проміжку, якщо:

$$2.324. f(x) = 5x - 3 \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$2.325. f(x) = x^2 - 2x - 1 \quad (-2 \leq x \leq 5);$$

$$2.326. f(x) = \frac{1}{x} \quad (0, 1 \leq x \leq 1);$$

$$2.327. f(x) = \sqrt{x} \quad (0 \leq x < +\infty);$$

$$2.328. f(x) = 2 \sin x - \cos x \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Які з наступних неперервних на $(0, 1)$ функцій рівномірно неперервні на $(0, 1)$:

$$2.329. f(x) = e^x;$$

$$2.330. f(x) = \frac{1}{x};$$

$$2.331. f(x) = \sin \frac{1}{x};$$

$$2.332. f(x) = x \sin \frac{1}{x};$$

$$2.333. f(x) = e^{-\frac{1}{x}}.$$

Які з наступних неперервних на $[0, +\infty)$ функцій рівномірно неперервні на $[0, +\infty)$:

$$2.334. f(x) = x^2;$$

$$2.335. f(x) = \sqrt{x};$$

$$2.336. f(x) = x \sin x;$$

$$2.337. f(x) = \sin^2 x;$$

$$2.338. f(x) = \sin(x^2);$$

$$2.339. f(x) = e^x;$$

$$2.340. f(x) = e^{-x};$$

$$2.341. f(x) = e^{\sin x^2};$$

$$2.342. f(x) = \sin(\sin x);$$

$$2.343. f(x) = \sin(x \sin x);$$

$$2.344. f(x) = \sin \sqrt{x}.$$

Розділ 3

Похідна та її застосування

3.1. Означення похідної. Диференціювання явно заданих функцій

1. Означення похідної. Похідною $f'(x)$ функції $y = f(x)$ в точці x називається величина

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Якщо границя не існує, то кажуть, що функція f не має похідної в точці x або що похідна функції f в точці x не існує.

2. Основні правила диференціювання. Нехай u, v – функції, які мають похідну в точці x , c – стала. Тоді

1. $c' = 0$;

2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

3. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$;

4. $(u \cdot v)' = u'v + v'u$;

5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, (v \neq 0)$;

6. $(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$.

3. Диференціювання основних елементарних функцій.

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$;

2. $(\sin x)' = \cos x$;

3. $(\cos x)' = -\sin x$;

4. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

5. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

7. $(\log_a)' = \frac{1}{x \ln a}$;

8. $(a^x)' = a^x \ln a$;

9. $(e^x)' = e^x$;

10. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;

11. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;

12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

14. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;

15. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Приклади розв'язування вправ

1. Чи має функція $y = |\ln x|$ похідну в точці $x = 1$?

Розв'язування. У точці $x = 1$

$$\Delta y(1) = |\ln(1 + \Delta x)| - |\ln 1| = \begin{cases} \ln(1 + \Delta x), & \Delta x \geq 0, \\ -\ln(1 + \Delta x), & \Delta x < 0. \end{cases}$$

Отже,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\ln(1 + \Delta x)}{\Delta x} = 1;$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y(1)}{\Delta x} = -1,$$

а значить, $y = |\ln x|$ в точці $x = 1$ похідної немає.

2. Користуючись означенням похідної, знайти похідні функцій:

а) $y = x^3$;

б) $y = \cos x$.

Розв'язування.

$$\begin{aligned} \text{а) } (x^3)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 = 3x^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } (\cos x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{\Delta x}{2} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \\ &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \right) = -\sin x. \end{aligned}$$

3. Знайти y' , якщо:

$$\text{а) } y = 7x^{5/3} - 4x^{2/3} + \frac{2}{x^3}; \quad \text{б) } y = 3 \cos x + x \sin x; \quad \text{в) } y = \frac{x^2 + 1}{\arctg x};$$

$$\text{г) } y = -\cos(x^3) + \sin^4 x; \quad \text{д) } y = x^{\lg x}.$$

Розв'язування. а) $y' = 7 \cdot \frac{5}{3} x^{\frac{5}{3}-1} - 4 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} + 2(x^{-3})' = \frac{35}{3} x^{2/3} - \frac{8}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{6}{x^4};$

$$\text{б) } y' = -3 \sin x + (1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x) = -2 \sin x + x \cos x;$$

$$\text{в) } y' = \frac{2x \arctg x - (x^2+1) \frac{1}{1+x^2}}{(\arctg x)^2} = \frac{2x \arctg x - 1}{\arctg^2 x};$$

$$\text{г) } y' = \sin(x^3) \cdot 3x^2 + 4 \cdot \sin^3 x \cos x = 3x^2 \sin x^3 + 4 \sin^3 x \cos x;$$

$$\begin{aligned} \text{д) } y' &= (x^{\lg x})' = (e^{\ln x^{\lg x}})' = (e^{\lg x \ln x})' = e^{\lg x \ln x} (\lg x \ln x)' = \\ &= e^{\lg x \ln x} \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} \ln x + \lg x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^{\lg x} \cdot \left(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\lg x}{x} \right). \end{aligned}$$

Вправи

I. Знайти похідні функцій:

$$3.1. y = \frac{2x}{1-x^2};$$

$$3.3. y = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3};$$

$$3.5. y = \frac{(1-x)^p}{(1+x)^q};$$

$$3.7. y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x};$$

$$3.9. y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}};$$

$$3.11. y = (1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3};$$

$$3.13. y = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

$$3.15. y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})};$$

$$3.17. y = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}.$$

$$3.2. y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2};$$

$$3.4. y = \frac{(2-x^2)(2-x^3)}{(1-x)^2};$$

$$3.6. y = \frac{(1-x)^q x^p}{1+x};$$

$$3.8. y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}};$$

$$3.10. y = x\sqrt{1+x^2};$$

$$3.12. y = \sqrt[n+m]{(1-x)^m(1-x)^n};$$

$$3.14. y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}};$$

$$3.16. y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}};$$

II. Знайти похідні функцій:

$$3.18. y = \cos 2x - 2 \sin x;$$

$$3.20. y = \sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x);$$

$$3.22. y = \sin(\sin(\sin x));$$

$$3.24. y = \frac{\cos x}{2 \sin^2 x};$$

$$3.26. y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x};$$

$$3.28. y = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x;$$

$$3.30. y = \sin(\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)).$$

$$3.19. y = (2 - x^2) \cos x - 2x \sin x;$$

$$3.21. y = \sin^n x \cos nx;$$

$$3.23. y = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2};$$

$$3.25. y = \frac{1}{\cos^n x};$$

$$3.27. y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2};$$

$$3.29. y = 4\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x} + \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^8 x};$$

III. Знайти похідні функцій:

$$3.31. y = e^{-x^2};$$

$$3.33. y = e^x(x^2 - 2x + 2);$$

$$3.35. y = \left(\frac{1-x^2}{2} \sin x - \frac{(1-x)^2}{2} \cos x \right) e^{-x};$$

$$3.37. y = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$3.39. y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x} \quad (a > 0);$$

$$3.41. y = \ln(\ln(\ln x));$$

$$3.43. y = \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{4}(1+x^2) - \frac{1}{2(1+x)};$$

$$3.45. y = \frac{1}{4(1+x^4)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^4}{x^4+1};$$

$$3.47. y = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1});$$

$$3.49. y = x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1}.$$

$$3.32. y = 2^{\operatorname{tg} 1/x};$$

$$3.34. y = e^x \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right);$$

$$3.36. y = \frac{\ln 3 \cdot \sin x + \cos x}{3^x};$$

$$3.38. y = e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}};$$

$$3.40. y = \lg^3 x^2;$$

$$3.42. y = \ln(\ln^2(\ln^3 x));$$

$$3.44. y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1};$$

$$3.46. y = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}};$$

$$3.48. y = \ln(x + \sqrt{x^2+1});$$

IV. Знайти похідні функцій:

$$3.50. y = \frac{2+3x^2}{x^4} \sqrt{1-x^2} + 3 \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x};$$

$$3.51. y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2};$$

$$3.52. y = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right);$$

$$3.53. y = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x + \ln \sin x;$$

$$3.54. y = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}};$$

$$3.56. y = \frac{1}{4x^4} \ln \frac{1}{x} - \frac{1}{16x^4};$$

$$3.58. y = x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x));$$

$$3.60. y = \arcsin \frac{x}{2};$$

$$3.62. y = \operatorname{arctg} \frac{x^2}{a};$$

$$3.64. y = \arccos \frac{1}{x};$$

$$3.66. y = \arccos(\cos^2 x);$$

$$3.68. y = \arccos \sqrt{1 - x^2};$$

$$3.70. y = \arcsin \frac{1 - x^2}{1 + x^2};$$

$$3.72. y = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}.$$

V. Знайти похідні функцій:

$$3.73. y = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}});$$

$$3.75. y = \sqrt{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{1 + x^4}}};$$

$$3.77. y = x + x^x + x^{x^x};$$

$$3.79. y = \sqrt{x};$$

$$3.81. y = (\ln x)^x : x^{\ln x}.$$

$$3.55. y = \frac{1}{x}(\ln^3 x + 3 \ln^2 x + 6 \ln x + 6);$$

$$3.57. y = \ln \left(\frac{1}{x} + \ln \left(\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x} \right) \right);$$

$$3.59. y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \cos \ln \operatorname{tg} x;$$

$$3.61. y = \arccos \frac{1 - x}{\sqrt{2}};$$

$$3.63. y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arccotg} \frac{\sqrt{2}}{x};$$

$$3.65. y = \arcsin(\sin x);$$

$$3.67. y = \arcsin(\sin x - \cos x);$$

$$3.69. y = \operatorname{arctg} \frac{1 + x}{1 - x};$$

$$3.71. y = \ln \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}} \right);$$

$$3.74. y = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{1 + x^2});$$

$$3.76. y = \arccos(\sin^2 x - \cos^2 x);$$

$$3.78. y = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x};$$

$$3.80. y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x};$$

3.2. Похідна оберненої функції і функцій заданих параметрично або неявно. Геометричний зміст похідної. Диференціал

1. Диференціал функції. Інваріантність форми першого диференціалу. Якщо приріст Δy функції $y = f(x)$ може бути зображений у вигляді

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = A(x) \cdot \Delta x + \alpha(x, \Delta x) \cdot \Delta x,$$

де $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(x, \Delta x) = 0$, то така функція називається диференційованою в точці x . Головна лінійна частина цього приросту $A(x) \cdot \Delta x$ називається диференціалом функції і позначається $df(x)$ або dy . За означенням $dx = \Delta x$.

Для існування диференціалу функції $y = f(x)$ необхідно і досить, щоб існувала скінченна похідна $y' = A(x)$. Диференціал функції можна записати наступним чином

$$dy = y' \cdot dx = f'(x) \cdot dx.$$

Для складної функції $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ форма диференціалу зберігається у вигляді

$$dy = f'(u) \cdot du.$$

2. Похідна оберненої функції. Якщо диференційована функція $y = f(x)$, $a < x < b$ має неперервну обернену функцію $x = g(y)$ і $f'(x) \neq 0$, то $g'(y)$ існує і

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

3. Похідна неявної функції. Якщо диференційована функція $y = f(x)$ задовольняє рівняння $F(x, y) = 0$, то потрібно продиференціювати рівняння відносно x , вважаючи y функцією, залежною від x , і розв'язати отримане рівняння $\frac{d}{dx} F(x, y) = 0$ відносно y' .

4. Похідна функції, заданої параметрично. Якщо система рівнянь

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in (\alpha; \beta), \text{ де } \varphi(t), \psi(t) \text{ — диференційовані функції і } \varphi'(t) \neq 0$$

визначає y як функцію від x , то похідна y'_x існує і

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

5. Рівняння дотичної та нормалі. Рівняння дотичної до графіку функції $y = f(x)$ у точці $M(x_0; y_0)$, $y_0 = f(x_0)$, має вигляд

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Рівняння нормалі до графіку функції $y = f(x)$ у тій же точці має вигляд

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad f'(x_0) \neq 0.$$

Приклади розв'язування вправ

1. Знайти області визначення обернених функцій $x = x(y)$ і знайти їх похідні, якщо

а) $y = 2x^3 + x^5 + 3x$;

б) $y = e^x - x$.

Розв'язування. Оскільки $y' = 6x^2 + 5x^4 + 3 > 0$ для $x \in \mathbb{R}$, то функція $y(x)$ зростає на всій числовій осі від $-\infty$ до $+\infty$. Отже, обернена функція $x = x(y)$ визначена на $(-\infty; +\infty)$ і

$$x'(y) = \frac{1}{6x^2 + 5x^4 + 3}.$$

б) Функція $y = e^x - x$ спадає на проміжку $(-\infty; 0]$ від $+\infty$ до 1 і зростає на проміжку $[0; +\infty)$ від 1 до $+\infty$. Справді, $y' = e^x - 1$ і $y' > 0$ при $x \in (0; +\infty)$, $y' < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$. Отже, на проміжку $[1; +\infty)$ визначено відповідно дві обернені функції $x_1(y)$, яка спадає від 0 до $-\infty$, та $x_2(y)$, яка зростає від 0 до $+\infty$. Похідні цих функцій $x'_1(y) = x'_2(y) = \frac{1}{e^x - 1}$.

2. Користуючись правилом диференціювання оберненої функції, знайти похідну y'_x для наступної функції:

а) $y = \sqrt[3]{x}$;

б) $y = \ln \sqrt{1 + x^2}$.

Розв'язування. а) Обернена функція $x = y^3$ має похідну $x'_y = 3y^2$. Отже,

$$y'_x = (\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3x^{2/3}}.$$

б) При $x \geq 0$ обернена функція $x = \sqrt{e^{2y} - 1}$, $y \in [0; +\infty)$, має похідну

$$x'_y = \frac{1}{2\sqrt{e^{2y} - 1}} \cdot e^{2y} \cdot 2 = \frac{e^{2y}}{\sqrt{e^{2y} - 1}}. \quad y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{\sqrt{e^{2y} - 1}}{e^{2y}} = \frac{\sqrt{x^2}}{1 + x^2} = \frac{x}{1 + x^2}.$$

3. Знайти похідну y'_x від наступних функцій $y(x)$, заданих неявно:

а) $x^3 + x^2y + y^2 = 0$;

б) $\ln x + e^{-y/x} = 0$.

Розв'язування. а) Диференціюючи відносно x , рахуючи y функцією від x , отримуємо $3x^2 + 2xy + x^2y' + 2yy' = 0$.

Розв'язуючи це рівняння відносно y , знаходимо $y' = -\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + 2y}$.

б) Аналогічно маємо

$$\frac{1}{x} + e^{-y/x} \left(\frac{y}{x^2} - \frac{y'}{x} \right) = 0.$$

Звідси, $x + ye^{-y/x} = y'xe^{-y/x}$. Отже, $y' = e^{y/x} + \frac{y}{x}$.

4. Для наступних функцій, заданих параметрично, знайти y'_x :

$$\text{а) } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \ln \operatorname{ctg} t, \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x = e^{ct}, \\ y = e^{-ct}, \end{cases} \quad c = \text{const.}$$

Розв'язування. а) Знаходимо похідні x'_t, y'_t .

$$x'_t = \frac{1}{2 \operatorname{ctg} t} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 t} \right) = -\frac{1}{\sin 2t},$$

$$y'_t = \frac{1}{\cos^2 t} - \frac{1}{\sin^2 t} = -\frac{\cos 2t}{\frac{1}{4} \sin^2 2t} = -\frac{4 \operatorname{ctg} 2t}{\sin 2t}.$$

Звідси $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-4 \operatorname{ctg} 2t}{\sin 2t} : \frac{-1}{\sin 2t} = 4 \operatorname{ctg} 2t$.

б) Аналогічно

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^{-ct} \cdot (-c)}{e^{ct} \cdot c} = -e^{-2ct} = -\frac{1}{x^2}.$$

5. Знайти кути, під якими перетинаються пряма $y = 4 - x$ та парабола $y = 4 - \frac{x^2}{2}$.

Розв'язування. Нагадаємо, що кутом між двома кривими у точці їх перетину називається кут між дотичними до цих кривих, проведеними у цій точці. Знайдемо точки перетину кривих, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} y = 4 - x, \\ y = 4 - \frac{x^2}{2}. \end{cases} \quad \text{Звідси } M_1(0; 4) \text{ і } M_2(2; 2).$$

Визначимо кутові коефіцієнти дотичних до параболи в точках M_1 та M_2 .

$$y'(0) = \left(4 - \frac{x^2}{2} \right)' \Big|_{x=0} = 0, \quad y'(2) = (-x) \Big|_{x=2} = -2.$$

Кутовий коефіцієнт прямої у всіх точках один і той самий і дорівнює у нашому випадку (-1) . Тепер визначаємо кут φ між прямими за формулою

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|,$$

де k_1, k_2 — кутові коефіцієнти кривих. Отже,

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \left| \frac{-1 - 0}{1 + 0} \right| = 1, \quad \varphi_1 = 45^\circ;$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \left| \frac{-1 + 2}{1 + 2} \right| = \frac{1}{3}, \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} \approx 18,5^\circ.$$

Написати рівняння дотичної та нормалі:

а) до кривої $y = x^3 - 3x + 2$ в точці $A(2; 4)$;

б) до кривої $\begin{cases} x = t^2 + 3t - 8, \\ y = 2t^2 - 2t - 5 \end{cases}$ в точці $B(2; -1)$.

Розв'язування. а) Знаходимо похідну в точці $x = 2$. Маємо

$y'(2) = (3x^2 - 3)|_{x=2} = 9$. Тому рівняння дотичної має вигляд $y - 4 = 9(x - 2)$ або $y = 9x - 14$.

Рівняння нормалі має вигляд $y - 4 = -\frac{1}{9}(x - 2)$ або $y = -\frac{1}{9}x + \frac{38}{9}$.

б) Легко бачити, що значення t , яке відповідає заданим значенням $x = 2$, $y = -1$ дорівнює 2. Справді, $x(2) = 4 + 6 - 8 = 2$, $y(2) = 8 - 4 - 5 = -1$. Далі знаходимо $y'_x|_{x=2} = \left(\frac{y'_t}{x'_t} \right) \Big|_{t=2} = \left(\frac{4t-2}{2t+3} \right) \Big|_{t=2} = \frac{6}{7}$.

Отже, рівняння дотичної $y + 1 = \frac{6}{7}(x - 2)$ або $6x - 7y - 19 = 0$, а рівняння нормалі — $y + 1 = -\frac{7}{6}(x - 2)$ або $7x + 6y - 8 = 0$.

Знайти диференціал функції y , якщо:

а) $y = \operatorname{tg} \sqrt{x}$; б) $y = x^2 \ln x$; в) $y = \frac{e^x}{x}$.

Розв'язування. а) Маємо $dy = y' \cdot dx = \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$.

б) Використовуючи формулу $d(uv) = vdu + u dv$, отримуємо

$$dy = \ln x \cdot d(x^2) + x^2 d(\ln x) = \ln x \cdot 2x \cdot dx + x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = x(2 \ln x + 1) dx.$$

в) Аналогічно за формулою $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$, маємо

$$dy = d\left(\frac{e^x}{x}\right) = \frac{x \cdot e^x dx - e^x \cdot dx}{x^2} = \frac{e^x(x - 1)}{x^2} dx.$$

Користуючись поняттям диференціалу, знайти приблизне значення функції $y = \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$ при $x = 0,15$.

Розв'язування. Зауважимо, що з $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$ отримуємо $y(x + \Delta x) = y(x) + \Delta y$. Покладаючи $\Delta y \approx dy$, маємо

$$y(x + \Delta x) \approx y(x) + dy = y(x) + y'(x) \cdot \Delta x.$$

У нашій задачі візьмемо $x = 0$ і $\Delta x = 0,15$. Тоді $y' = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{-4/5} \cdot \frac{4}{(2+x)^2}$; $y'(0) = -\frac{1}{5}$; $dy = -\frac{1}{5} \cdot 0,15 = -0,03$.

Отже, $y(0,15) \approx y(0) + dy = 1 - 0,03 = 0,97$.

Вправи

Знайти області визначення обернених функцій $x = x(y)$ і знайти їх похідні, якщо:

3.82. $y = x + \ln x$ ($x > 0$);

3.83. $y = x + e^x$;

3.84. $y = \operatorname{sh} x$;

3.85. $y = \operatorname{th} x$.

Знайти однозначні неперервні вітки обернених функцій $x = x(y)$, знайти їх похідні і побудувати графіки, якщо:

3.86. $y = 2x^2 - x^4$; 3.87. $y = \frac{x^2}{1+x^2}$; 3.88. $y = 2e^{-y} - e^{-2y}$.

Знайти похідні y'_x , якщо:

3.89. $x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}}$, $y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}}$; 3.90. $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$;

3.91. $x = a \cos t$, $y = b \sin t$; 3.92. $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$;

3.93. $x = a \cos^3 t$, $y = b \sin^3 t$; 3.94. $x = a(1 - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$;

3.95. $x = e^{2t} \cos^2 t$, $y = e^{2t} \sin^2 t$; 3.96. $x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

Знайти похідні y'_x від наступних функцій, заданих в неявному вигляді:

3.97. $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$;

3.98. $y^2 = 2px$ (парабола);

3.99. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (еліпс);

3.100. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ (парабола);

3.101. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (астроїда);

3.102. $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ (логарифмічна спіраль).

- 3.103. Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = (x + 1)\sqrt[3]{3 - x}$ в точках: а) $A(-1,0)$; б) $B(2,3)$; в) $C(3,0)$.
- 3.104. У яких точках кривої $y = 2 + x - x^2$ дотична до неї
а) паралельна осі Ox ; б) паралельна бісектрисі першого координатного кута?
- 3.105. Під яким кутом крива $y = \ln x$ перетинає вісь Ox ?
- 3.106. Під якими кутами перетинаються криві $y = x^2$ і $x = y^2$?
- 3.107. Під якими кутами перетинаються криві $y = \sin x$ і $y = \cos x$?
- 3.108. При якому значенні параметра a парабола $y = ax^2$ дотикається кривої $y = \ln x$?
- 3.109. Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$ в точках: а) $t = 0$, б) $t = 1$.
- 3.110. Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої $x = \frac{2t+t^2}{1+t^3}$, $y = \frac{2t-t^2}{1+t^3}$ в точках: а) $t = 0$, б) $t = 1$, в) $t = \infty$.
- 3.111. Написати рівняння дотичної до циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ в довільних точках $t = t_0$.
- 3.112. Написати рівняння дотичної і нормалі в заданих точках до кривих:
а) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$, $M(6;6,4)$; б) $xy + \ln y = 1$, $M(1;1)$.
- Знайти диференціал функції y , якщо:
- 3.113. $y = \frac{1}{x}$; 3.114. $y = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$; 3.115. $y = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}|$;
3.116. $y = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$; 3.117. $y = \arcsin \frac{x}{a}$.
- Знайти:
- 3.118. $d(xe^x)$; 3.119. $d(\sin x - x \cos x)$; 3.120. $d\left(\frac{1}{x^3}\right)$;
3.121. $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$; 3.122. $d(\sqrt{a^2 + x^2})$; 3.123. $d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$;
3.124. $d \ln(1 - x^2)$; 3.125. $d\left(\arccos \frac{1}{|x|}\right)$; 3.126. $d(a^{x^2})$;
3.127. $d\left\{\frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| \right\}$.

Нехай u, v, w — диференційовані функції від x . Знайти диференціал функції y , якщо:

$$\begin{aligned} 3.128. y &= uvw; & 3.129. y &= \frac{u}{v^2}; & 3.130. y &= \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}; \\ 3.131. y &= \operatorname{arctg} \frac{u}{v}; & 3.132. y &= \ln \sqrt{u^2 + v^2}. \end{aligned}$$

Заміняючи приріст функції Δy диференціалом dy , знайти приблизне значення:

$$3.133. \cos 31^\circ; \quad 3.134. \lg 10,21; \quad 3.135. \sqrt[3]{33}; \quad 3.136. \operatorname{ctg}(45^\circ 10').$$

3.3. Похідні і диференціали вищих порядків

1. Якщо похідна $(n-1)$ -го порядку функції $y = f(x)$ вже визначена, то похідна n -го порядку визначається рівністю

$$y^{(n)}(x) = (y^{(n-1)})'.$$

Зокрема, $y'' = (y'(x))'$; $y''' = (y''(x))'$, і т.д.

2. Якщо u та v n раз диференційовані функції, то для їх лінійної комбінації

$$(c_1 u + c_2 v)^{(n)} = c_1 \cdot u^{(n)} + c_2 \cdot v^{(n)},$$

а для їх добутку $u \cdot v$ — формула Лейбніца

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)} v + n u^{(n-1)} v' + \frac{n(n-1)}{2!} u^{(n-2)} v'' + \dots + u v^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)},$$

$$\text{де } u^{(0)} = u, v^{(0)} = v \text{ і } C_n^k = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

3. Справедливі формули

$$\text{а) } (x^k)^{(n)} = k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-n+1) x^{k-n};$$

$$\text{б) } (a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a;$$

$$\text{в) } (\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n};$$

$$\text{г) } (\sin x)^{(n)} = \sin \left(\frac{\pi n}{2} + x \right);$$

$$\text{д) } (\cos x)^{(n)} = \cos \left(\frac{\pi n}{2} + x \right).$$

Диференціали вищих порядків функції $y = f(x)$ послідовно визначаються так:

$$d^2y = d(dy); \quad d^3y = d(d^2y); \quad \dots; \quad d^ny = d(d^{n-1}y).$$

Якщо $y = f(x)$ і x — незалежна змінна, то

$$d^2y = y'' \cdot (dx)^2; \quad d^3y = y''' \cdot (dx)^3; \quad \dots; \quad d^ny = y^{(n)} \cdot (dx)^n.$$

Якщо ж $y = f(x)$, де $u = \varphi(x)$, то $d^2y = f''(u)(du)^2 + f'(u)d^2u$ і т.д.

Приклади розв'язування вправ

1. Знайти y''_{xx} , якщо

$$\text{а) } y = \frac{\ln x}{x}; \quad \text{б) } \begin{cases} x = e^t, \\ y = t^2; \end{cases} \quad \text{в) } \operatorname{arctg} y + x - y = 0.$$

$$\text{Розв'язування. а) } y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}; \quad y'' = \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3}.$$

$$\text{б) } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t}{e^t}; \quad y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \left(\frac{2t}{e^t}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{2(e^t - te^t)}{e^{2t}} \cdot \frac{1}{e^t} = \frac{2(1-t)}{e^{2t}}.$$

$$\text{в) Маємо } \frac{1}{1+y^2} \cdot y'_x + 1 - y'_x = 0. \text{ Звідси } y'_x = \frac{1+y^2}{y^2} = \frac{1}{y^2} + 1.$$

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \left(\frac{1}{y^2} + 1\right)'_x = \frac{-2}{y^3} \cdot y'_x = \frac{-2}{y^3} \cdot \left(\frac{1}{y^2} + 1\right) = \frac{-2(1+y^2)}{y^5}.$$

2. Знайти похідні вказаного порядку.

$$\text{а) } y = \sin x \cdot \ln x, \quad y^{(4)} - ?; \quad \text{б) } y = x^3 \cdot \cos 5x, \quad y^{(100)} - ?.$$

Розв'язування. а) За формулою Лейбніца

$$\begin{aligned} y^{(4)} &= (\sin x)^{(4)} \ln x + 4(\sin x)^{(3)} (\ln x)' + 6(\sin x)^{(2)} (\ln x)^{(2)} + 4(\sin x)' (\ln x)^{(3)} + \\ &+ \sin x (\ln x)^{(4)} = \sin(x+2\pi) \ln x + 4 \sin(x+\frac{3\pi}{2}) \frac{1}{x} + 6 \sin(x+\pi) \frac{(-1)}{x^2} + 4 \cos x \frac{2}{x^3} + \\ &+ \sin x \frac{(-6)}{x^4} = \sin x \left(\ln x + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4} \right) - \cos x \left(\frac{4}{x} - \frac{8}{x^3} \right). \end{aligned}$$

б) Аналогічно

$$\begin{aligned} (x^3 \cos 5x)^{(100)} &= \sum_{k=0}^{100} C_{100}^k (x^3)^{(k)} (\cos 5x)^{(100-k)} = \\ &= x^3 \cdot 5^{100} \cdot \cos\left(5x + \frac{100\pi}{2}\right) + 100 \cdot 3x^2 \cdot 5^{99} \cdot \cos\left(5x + \frac{99\pi}{2}\right) + \\ &+ \frac{100 \cdot 99}{2!} \cdot 6 \cdot x \cdot 5^{98} \cdot \cos\left(5x + \frac{98\pi}{2}\right) + \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{3!} \cdot 6 \cdot 5^{97} \cdot \cos\left(5x + \frac{97\pi}{2}\right) = \\ &= 5^{97} (125 \cdot x^3 \cdot \cos 5x + 7500 \cdot x^2 \cdot \sin 5x - 1500 \cdot 99 \cdot x \cdot \cos 5x - 9900 \cdot 98 \cdot \sin 5x). \end{aligned}$$

3. Знайти d^3y , якщо $y = \sin u$, $u = u(x)$.

$$\begin{aligned}
&\text{Розв'язування. } dy = \cos u \cdot du = \cos u \cdot u' \cdot dx; \\
d^2y &= d(dy) = d(\cos u \cdot u' \cdot dx) = (d(\cos u) \cdot u' + \cos u \cdot d(u'))dx = \\
&= (-\sin u \cdot u'^2 dx + \cos u \cdot u'' dx)dx = (u'' \cos u - u'^2 \sin u)dx^2; \\
d^3y &= d(d^2y) = d(u'' \cos u - (u')^2 \sin u)dx^2 = \\
&= (d(u'') \cos u + u'' d(\cos u) - d((u')^2) \sin u - (u')^2 d(\sin u))dx^2 = \\
&= (u''' \cos u dx - u'' \sin u \cdot u' \cdot dx - 2u' \cdot u'' \sin u dx - (u')^2 \cos u \cdot u' \cdot dx)dx^2 = \\
&= (u''' \cos u - 3u' \cdot u'' \sin u - (u')^3 \cos u \cdot u')dx^3.
\end{aligned}$$

Вправи

Знайти y'' , якщо:

$$3.137. y = x\sqrt{1+x^2};$$

$$3.138. y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$3.139. y = e^{-x^2};$$

$$3.140. y = \operatorname{tg} x;$$

$$3.141. y = (1+x^2) \operatorname{arctg} x;$$

$$3.142. y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$3.143. y = x \ln x;$$

$$3.144. y = \ln f(x);$$

$$3.145. y = x(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)).$$

$$3.146. \text{ Знайти } y(0), y'(0) \text{ і } y''(0), \text{ якщо } y = e^{\sin x} \cos(\sin x).$$

Нехай $u = \varphi(x)$ і $v = \psi(x)$ — двічі диференційовані функції. Знайти y'' , якщо:

$$3.147. y = u^2;$$

$$3.148. y = \ln \frac{u}{v};$$

$$3.149. y = \sqrt{u^2 + v^2};$$

$$3.150. y = u^v \ (u > 0).$$

Нехай $f(x)$ — тричі диференційована функція. Знайти y' і y''' , якщо:

$$3.151. y = f(x^2);$$

$$3.152. y = f\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$3.153. y = f(e^x);$$

$$3.154. y = f(\ln x).$$

• Знайти d^2y , якщо:

$$3.155. y = \sqrt{1+x^2};$$

$$3.156. y = \frac{\ln x}{x};$$

$$3.157. y = x^x.$$

Нехай $u = \varphi(x)$ і $v = \psi(x)$ — двічі диференційовані функції. Знайти d^2y , якщо:

$$3.158. y = uv; \quad 3.159. y = \frac{u}{v}; \quad 3.160. y = u^m v^n;$$

$$3.161. u = a^u; \quad 3.162. y = \ln \sqrt{u^2 + v^2}; \quad 3.163. y = \operatorname{arctg} \frac{u}{v}.$$

Знайти похідні y'_x , y''_{x^2} , y'''_{x^3} від функції $y = y(x)$, заданої параметрично, якщо:

$$3.164. \begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3; \end{cases} \quad 3.165. \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t; \end{cases}$$

$$3.166. \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases} \quad 3.167. \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$$

Знайти похідні y'_x , y''_{x^2} , y'''_{x^3} від функції $y = y(x)$, заданої неявно, якщо:

$$3.168. x^2 + y^2 = 25. \text{ Чому дорівнюють ці похідні в точці } M(3,4)?$$

$$3.169. y^2 = 2px; \quad 3.170. x^2 - xy + y^2 = 1.$$

Знайти y'_x , y''_{x^2} , якщо:

$$3.171. y^2 + 2 \ln y = x^4; \quad 3.172. \sqrt{x^2 + y^2} = ae^{\operatorname{arctg} y/x}.$$

Знайти похідні вказаного порядку.

$$3.173. y = \frac{a}{x^m}; \text{ знайти } y'''; \quad 3.174. y = x(2x-1)^2(x+3)^3; \text{ знайти } y^{(7)};$$

$$3.175. y = \sqrt{x}; \text{ знайти } y^{(10)}; \quad 3.176. y = \frac{x^2}{1-x}; \text{ знайти } y^{(8)};$$

$$3.177. y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}; \text{ знайти } y^{(100)}; \quad 3.178. y = x^2 e^{2x}; \text{ знайти } y^{(20)};$$

$$3.179. y = \frac{e^x}{x}; \text{ знайти } y^{(10)}; \quad 3.180. y = x \ln x; \text{ знайти } y^{(5)};$$

$$3.181. y = \frac{\ln x}{x}; \text{ знайти } y^{(5)}; \quad 3.182. y = x^2 \sin 2x; \text{ знайти } y^{(50)};$$

$$3.183. y = \frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}}; \text{ знайти } y'''; \quad 3.184. y = \sin x \sin 2x \sin 3x; \text{ знайти } y^{(10)};$$

$$3.185. y = x \operatorname{sh} x; \text{ знайти } y^{(100)}; \quad 3.186. y = e^x \cos x; \text{ знайти } y^{IV};$$

$$3.187. y = \sin^2 x \ln x; \text{ знайти } y^{(6)}.$$

Вважаючи x незалежною змінною, знайти диференціали вказаного порядку:

3.188. $y = x^5$; знайти d^5y ;

3.189. $y = 1/\sqrt{x}$; знайти d^3y ;

3.190. $y = x \cos 2x$; знайти $d^{10}y$;

3.191. $y = e^x \ln x$; знайти d^4y ;

3.192. $y = \cos x \cdot \operatorname{ch} x$; знайти d^6y .

Нехай u — функція від x , диференційована необхідне число раз. Знайти диференціали вказаного порядку.

3.193. $y = u^2$; знайти $d^{10}y$;

3.194. $y = e^u$; знайти d^4y ;

3.195. $y = \ln u$; знайти d^3y .

Знайти $y^{(n)}$, якщо:

3.196. $y = \frac{x}{x(1-x)}$;

3.197. $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$;

3.198. $y = \sin^2 x$;

3.199. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$;

3.200. $y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$;

3.201. $y = \cos^2 x$;

3.202. $y = \sin^3 x$;

3.203. $y = \sin ax \sin bx$;

3.204. $y = \cos^3 x$;

3.205. $y = \cos ax \cos bx$;

3.206. $y = \sin^2 ax \cos bx$;

3.207. $y = x \cos ax$;

3.208. $y = \sin ax \cos bx$;

3.209. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$;

3.210. $y = x^2 \sin ax$;

3.211. $y = e^x/x$;

3.212. $y = e^x \cos x$;

3.213. $y = e^x \sin x$;

3.214. $y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$.

3.4. Правило Лопітала

1. Невизначеності $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$. Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ диференційовані в $\overset{\circ}{U}(a)$, причому $g'(x) \neq 0$, і якщо

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad \text{або} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty,$$

то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

за умови, що границя $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ існує. Точка a може бути як скінченною, так і невластивою точкою $+\infty$, $-\infty$ або ∞ .

2. Невизначеності вигляду $0 \cdot \infty$ або $\infty - \infty$ зводяться до невизначеності $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$ алгебраїчними перетвореннями.

3. Невизначеності вигляду 1^∞ , ∞^0 або 0^0 зводяться до невизначеності $0 \cdot \infty$ за допомогою попереднього логарифмування або перетворення

$$(f(x))^{g(x)} = e^{\bar{g}(x) \cdot \ln f(x)}.$$

Приклади розв'язування вправ

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{-2ax}}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{ax} - e^{-2ax})'}{(\ln(1+x))'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^{ax} + 2ae^{-2ax}}{\frac{1}{1+x}} = 3a.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{x} \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(\operatorname{ctg} \frac{1}{x})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin^2 \frac{1}{x}} \cdot (-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sin^2(1/x) \cdot x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \sin^2 \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2 \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t}{t} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin t \cos t}{t} = 0.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} e^{\operatorname{tg} x \cdot \ln \sin x} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\operatorname{ctg} x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x}{-\frac{1}{\sin^2 x}}} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (-\sin x \cos x)} = e^0 = 1.$$

Вправи

Знайти значення наступних виразів:

$$3.215. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx};$$

$$3.216. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2};$$

$$3.217. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x};$$

$$3.218. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{tg} 4x - 12 \operatorname{tg} x}{3 \sin 4x - 12 \sin x};$$

$$3.219. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x};$$

$$3.220. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^2};$$

$$3.221. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1};$$

$$3.222. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3};$$

$$3.223. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2};$$

$$3.224. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3};$$

$$3.225. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3};$$

$$3.226. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(\sqrt{a} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{b}} \right);$$

$$3.227. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)};$$

$$3.228. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} \right);$$

$$3.229. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)};$$

$$3.230. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4};$$

$$3.231. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\operatorname{th} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right).$$

Знайти значення наступних виразів:

$$3.232. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^c} \quad (c > 0);$$

$$3.233. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} \quad (a > 0, n > 0);$$

$$3.234. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^{100}};$$

$$3.235. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-0.01x};$$

$$3.236. \lim_{x \rightarrow 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x);$$

$$3.237. \lim_{x \rightarrow +0} x^\epsilon \ln x \quad (\epsilon > 0);$$

$$3.238. \lim_{x \rightarrow +0} x^x;$$

$$3.239. \lim_{x \rightarrow 0} x^{x^2-1};$$

$$3.240. \lim_{x \rightarrow 0} (x^{x^x} - 1);$$

$$3.241. \lim_{x \rightarrow +0} x^{k/(1+\ln x)};$$

$$3.242. \lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(1-x)};$$

$$3.243. \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\operatorname{tg} \pi x/2};$$

$$3.244. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x};$$

$$3.245. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x};$$

$$3.246. \lim_{x \rightarrow +0} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x;$$

$$3.247. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{1/x};$$

$$3.248. \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a} \right)^{\operatorname{ctg}(x-a)};$$

$$3.249. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - x \ln a}{b^x - x \ln b} \right)^{1/x^2};$$

$$3.250. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right);$$

$$3.251. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right);$$

$$3.252. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right).$$

3.5. Формула Тейлора. Знаходження границь за допомогою формули Тейлора

1. Формула Тейлора. Якщо функція f n -раз диференційована в околі $U(a)$, то для $x \in U(a)$ справедлива формула Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + r_n(x),$$

де

$$r_n(x) = o((x-a)^{n-1}), \quad x \rightarrow a$$

(загальний член формули Тейлора вигляду Пеано),

$$r_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n, \quad \xi = a + \theta(x-a), \quad 0 < \theta < 1$$

(загальний член формули Тейлора вигляду Лагранжа).

У випадку $a = 0$ з формули Тейлора отримуємо формулу Маклорена.

2. Основні розвинення функцій за формулою Маклорена

$$\text{I. } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0;$$

$$\text{II. } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0;$$

$$\text{III. } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} + o(x^{2n}), \quad x \rightarrow 0;$$

$$\text{IV. } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0;$$

$$\text{V. } (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

Приклади розв'язування вправ

1. Розвинути многочлен $P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$ за степенями двочлена $x - 1$, використовуючи формулу Тейлора.

Розв'язування. Знаходимо значення многочлена і його похідних у точці $x = 1$. Маємо $P(1) = 0$, $P'(1) = 0$, $P''(1) = 0$, $P'''(1) = 18$, $P^{(4)}(1) = 72$,

$P^{(5)}(1) = 120$, $P^{(n)}(1) = 0$ для $n \geq 6$. Підставивши знайдені значення у формулу Тейлора, отримуємо

$$f(x) = \frac{18}{3!}(x-1)^3 + \frac{72}{4!}(x-1)^4 + \frac{120}{5!}(x-1)^5 = (x-1)^5 + 3(x-1)^4 + 3(x-1)^3.$$

2. Обчислити з точністю до 10^{-5} наближене значення $\cos 5^\circ$.

Розв'язування. У формулу Маклорена

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + r_{2n+2}$$

підставляємо $x = \frac{\pi}{36}$. Оскільки

$$\frac{x^2}{2!} = \frac{\pi^2}{2 \cdot 36^2} \approx 0,003808, \quad \frac{x^4}{4!} = \frac{1}{6} \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 = 2,4 \cdot 10^{-6},$$

то обмежимося лише наступними членами: $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$. При цьому похибка оцінюється величиною

$$|r_4(x)| = \left| \frac{\cos \theta x}{4!} x^4 \right| < \left| \frac{x^4}{4!} \right| < 2,5 \cdot 10^{-6}.$$

Отже, з потрібною точністю,

$$\cos 5^\circ = \cos \frac{\pi}{36} \approx 1 - 0,00381 = 0,99619.$$

3. Написати розвинення функції $f(x) = \sin^2 x - x^2 e^{-x}$ за цілими додатними степенями x , обмежившись членами до четвертого порядку малості відносно x .

Розв'язування.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \right)^2 - x^2 \cdot \left(1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2!} + o(x^2) \right) = \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5) - x^2 + x^3 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) = x^3 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^4), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

4. Написати формулу Маклорена з залишковим членом у вигляді Пеано для функції $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

Розв'язування. При $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x^2} &= (1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2}-1)}{2!} (x^2)^2 + \dots + \frac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2}-1) \cdot \dots \cdot (\frac{1}{2}-n+1)}{n!} (x^2)^n + \\ &+ o((x^2)^n) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^6}{2^3 \cdot 3!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^8}{2^4 \cdot 4!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} (2n-3)!!}{2^n \cdot n!} x^{2n} + o(x^{2n}). \end{aligned}$$

5. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 + x^2} \cos x}{\operatorname{tg}^4 x}$.

Розв'язування. За формулою Маклорена

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} \cos x}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{x^4}{2^2 \cdot 2!} + o(x^4)\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)}{x^4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} + \frac{o(x^4)}{x^4}\right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Вправи

3.253. Многочлен $P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$ розвинути за цілими невід'ємними степенями двочлена $x + 1$.

Написати розвинення за цілими невід'ємними степенями змінної x до членів вказаного порядку включно наступних функцій:

3.254. $f(x) = \frac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2}$ до члена з x^4 . Чому дорівнює $f^{(4)}(0)$?

3.255. $f(x) = \frac{(1 + x)^{100}}{(1 - 2x)^{40}(1 + 2x)^{60}}$ до члена з x^2 ;

3.256. $f(x) = \sqrt[m]{a^m + x}$ ($a > 0$) до члена з x^2 ;

3.257. $f(x) = \sqrt{1 - 2x + x^3} - \sqrt[3]{1 - 3x + x^2}$ до члена з x^3 ;

3.258. $f(x) = e^{2x - x^2}$ до члена з x^5 ;

3.259. $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ до члена з x^4 ;

3.260. $f(x) = \sqrt[3]{\sin x^3}$ до члена з x^{13} ;

3.261. $f(x) = \ln \cos x$ до члена з x^6 ;

3.262. $f(x) = \sin(\sin x)$ до члена з x^3 ;

3.263.) $f(x) = \operatorname{tg} x$ до члена з x^5 ;

3.264. $f(x) = \ln \frac{\sin x}{x}$ до члена з x^6 .

Написати формулу Тейлора відносно точки 0 з залишковим членом у вигляді Пеано для наступних функцій:

3.265. $f(x) = \operatorname{sh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$;

3.266. $f(x) = \operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$;

3.267. $f(x) = x \ln(1 + x)$;

3.268. $f(x) = \sin^2 x$;

3.269. $f(x) = (a + x)e^x$;

3.270. $f(x) = e^{x^2}$;

3.271. $f(x) = x \ln(1 + x^2)$;

3.272. $f(x) = \ln(1 + x^3)$;

3.273. $f(x) = x \sin x - \cos x^2$;

3.274. $f(x) = \frac{1-x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$;

3.275. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

Використовуючи розвинення за формулою Тейлора, знайти наступні границі:

3.276. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}$;

3.277. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$;

3.278. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{x^2/2}}{x^4}$;

3.279. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$;

3.280. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$;

3.281. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5})$;

3.282. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right)$;

3.283. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{1/x} - \sqrt{x^6 + 1} \right)$;

3.284. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(\operatorname{tg} x) - x}{x^3}$;

3.285. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt{1-x^2}}{x^5}$;

3.286. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$;

3.287. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right)$.

3.6. Монотонність, опуклість функцій.

Точки екстремуму

1. Функція $f(x)$ називається *іст зростаючою (спадною)* на $(a; b)$, якщо

$$(\forall x_1, x_2 \in (a; b), x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2) \quad ((f(x_1) \geq f(x_2))).$$

Зростаючі або спадні функції називаються *монотонними функціями*.

2. *Критерій монотонності.* Для того, щоб диференційована на $(a; b)$ функція була зростаючою (спадною), необхідно і досить, щоб $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для всіх $x \in (a; b)$.

3. *Точки екстремуму.* Точка x_0 називається *точкою локального максимуму (мінімуму)* функції f , якщо

$$(\exists U(x_0))(\forall x \in U(x_0)) : f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)).$$

Точки максимуму та мінімуму називаються *точками екстремуму* функції.

4. **Необхідна умова точки екстремуму.** В точках екстремуму похідна $f'(x)$ дорівнює нулю або не існує. Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними точками*.

5. **Достатні умови точки екстремуму.** а) Якщо функція f неперервна в околі $U(x_0)$ і при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак, тобто $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для $x \in U(x_0 - 0)$ і $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$) для $x \in U(x_0 + 0)$, то x_0 є точкою максимуму f (точкою мінімуму f).

б) Якщо $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$, то x_0 є точкою максимуму функції f ; якщо $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка мінімуму функції f .

в) Нехай $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, але $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Якщо число n — парне, то при $f^{(n)}(x_0) < 0$ в точці x_0 — максимум, при $f^{(n)}(x_0) > 0$ — мінімум. Якщо ж число n — непарне, то екстремуму в точці x_0 немає.

6. Графік функції $y = f(x)$ називається *опуклим вгору* (опуклим вниз) на $(a; b)$, якщо

$$(\forall x_1, x_2 \in (a; b))(\forall \lambda \in [0; 1]) : f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

$$(f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)).$$

Достатньою ознакою опуклості графіку функції вгору (вниз), за умови існування другої похідної $f''(x)$, є виконання нерівності $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) при $x \in (a; b)$.

7. Точки, в яких визначена функція і в яких змінюється напрям опуклості графіку функції, називають *точками перегину*.

В точках перегину друга похідна функції дорівнює нулю або не існує.

Приклади розв'язування вправ

1. Знайти точки екстремуму функції $f(x) = x^2 e^{-x}$.

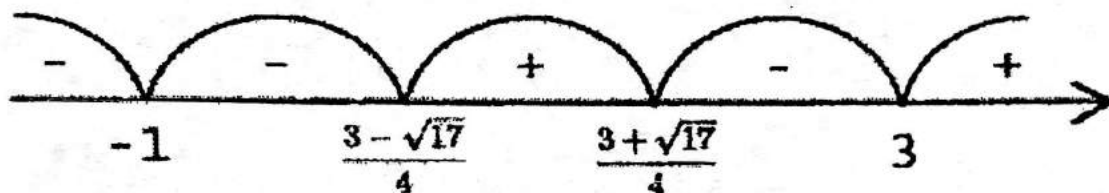
Розв'язування. $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x} = x(2 - x)e^{-x}$. На проміжках $(-\infty; 0)$ і $(2; +\infty)$ похідна $f'(x) < 0$, а значить, функція спадає; на проміжку $(0; 2)$ похідна $f'(x) > 0$ і функція зростає.

2. Знайти точки екстремуму функції $f(x) = x(x + 1)^3(x - 3)^2$.

Розв'язування.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+1)^3(x-3)^2 + 3x(x+1)^2(x-3)^2 + 2x(x+1)^3(x-3) = \\ &= 3(x+1)^2(x-3)(2x^2 - 3x - 1). \end{aligned}$$

Розв'язавши рівняння $f'(x) = 0$, маємо $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{4}$, $x_3 = \frac{3+\sqrt{17}}{4}$, $x_4 = 3$. Враховуючи знак похідної $f'(x)$ на інтервалах (див. малюнок),



отримуємо, що в точці $x_1 = -1$ екстремуму немає, в точці x_2 — мінімум, в точці x_3 — максимум, в точці x_4 — мінімум.

3. Знайти проміжки опуклості й точки перегину графіку функції

$$y = 2 - |x^5 - 1|.$$

Розв'язування. Запишемо функцію у вигляді

$$y = \begin{cases} 2 - (x^5 - 1), & x \geq 1, \\ 2 + (x^5 - 1), & x < 1. \end{cases} = \begin{cases} 3 - x^5, & x \geq 1, \\ 1 + x^5, & x < 1. \end{cases}$$

$$\text{Маємо } y' = \begin{cases} -5x^4, & x > 1, \\ 5x^4, & x < 1. \end{cases}$$

У точці $x = 1$ похідна не існує. Далі

$$y'' = \begin{cases} -20x^3, & x > 1, \\ 20x^3, & x < 1, \end{cases}$$

звідки випливає, що в точці $x = 0$ друга похідна $y'' = 0$.

Отже, дослідженню підлягають три інтервали $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ та $(1; +\infty)$. На першому та третьому інтервалах $y'' < 0$, а на другому — $y'' > 0$. Таким чином, на інтервалах $(-\infty; 0)$ та $(1; +\infty)$ графік функції опуклий вгору, а на $(0; 1)$ — опуклий вниз. Точки $A(0; 1)$ та $B(1; 2)$ є точками перегину графіку функції f .

Вправи

Визначити проміжки строгої монотонності наступних функцій:

3.288. $y = 2 + x - x^2$;

3.289. $y = 3x - x^3$;

3.290. $y = \frac{2x}{1 + x^2}$;

3.291. $y = \frac{\sqrt{x}}{x + 100}$;

3.292. $y = x + \sin x$;

3.293. $y = x + |\sin 2x|$;

3.294. $y = \cos \frac{\pi}{x}$;

3.295. $y = \frac{x^2}{2^x}$;

3.296. $y = \frac{x^n}{e^x} \ (n > 0, x \geq 0)$;

3.297. $y = x^2 - \ln x^2$.

Дослідити на екстремум наступні функції:

3.298. $y = 2 + x - x^2$;

3.299. $y = (x - 1)^3$;

3.300. $y = (x - 1)^4$;

3.301. $y = x^m(1 - x)^n \ (m, n \in \mathbb{N})$;

3.302. $y = \cos x + \operatorname{ch} x$;

3.303. $y = (x + 1)^{10} e^{-x}$;

3.304. $y = |x|$;

3.305. $y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}$;

3.306. $y = x^{1/3}(1 - x)^{2/3}$.

Знайти екстремуми наступних функцій:

3.307. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$;

3.308. $y = 2x^2 - x^4$;

3.309. $y = x(x - 1)^2(x - 2)^3$;

3.310. $y = x + \frac{1}{x}$;

3.311. $y = \frac{2x}{1 + x^2}$;

3.312. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$;

3.313. $y = \sqrt{2x - x^2}$;

3.314. $y = x\sqrt[3]{x - 1}$;

3.315. $y = xe^{-x}$;

3.316. $y = \sqrt{x} + \ln x$;

3.317. $y = \frac{\ln^2 x}{x}$;

3.318. $y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$;

3.319. $y = \frac{10}{1 + \sin^2 x}$;

3.320. $y = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$;

3.321. $y = e^x \sin x$;

3.322. $y = |x|e^{-|x-1|}$.

Знайти найменше і найбільше значення наступних функцій:

3.323. $f(x) = 2^x$ на проміжку $[-1; 5]$;

3.324. $f(x) = x^2 - 4x + 6$ на проміжку $[-3; 10]$;

3.325. $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ на проміжку $[-10; 10]$;

3.326. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ на проміжку $[0,01; 100]$;

3.327. $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$ на проміжку $[-1; 1]$.

Довести нерівність:

3.328. $|3x - x^3| \leq 2$ при $|x| \leq 2$;

3.329. $\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1$, якщо $0 \leq x \leq 1$ і $p > 1$;

3.330. $|a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$;

3.331. $\frac{2}{3} \leq \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \leq 2$ при $-\infty < x < +\infty$.

Знайти проміжки опуклості і точки перегину графіків наступних функцій

3.332. $y = 3x^2 - x^3$; 3.333. $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$; 3.334. $y = x + x^{5/3}$;

3.335. $y = \sqrt{1 + x^2}$; 3.336. $y = x + \sin x$; 3.337. $y = e^{-x^2}$;

3.338. $y = \ln(1 + x^2)$; 3.339. $y = x \sin(\ln x)$.

3.7. Побудова графіків функцій

Загальне дослідження функцій і побудову їх графіків зручно виконувати за наступною схемою.

1. Знайти область визначення функції.
2. Вияснити, чи є функція парною, непарною, періодичною.
3. Дослідити функцію на неперервність, знайти точки розриву і вияснити характер (тип) розривів.
4. Знайти точки перетину з осями координат.
5. Знайти точки екстремуму функції, обчислити значення функції в цих точках. Встановити інтервали монотонності функції.
6. Знайти асимптоти графіку функції.

7. Знайти точки перегину, обчислити значення функції в цих точках. Встановити інтервали опуклості графіку функції.
8. Використовуючи результати досліджень, побудувати графік функції.

Вказану схему слід розглядати як дуже приблизну. Зокрема, ескіз графіку рекомендується малювати вже після знаходження точок екстремуму.

Приклади розв'язування вправ

1. Побудувати графік функції $y = \frac{2x^3}{x^2 - 4}$.

Розв'язування. Функція визначена та неперервна на всій дійсній осі, крім точок $x = \pm 2$. Функція є непарною, її графік симетричний відносно початку координат, тому достатньо дослідити функцію на проміжку $(0; +\infty)$.

$y = 0$ тоді і лише тоді, коли $x = 0$. Отже, на інтервалі $(0; 2)$ $f(x) < 0$, а на $(2; +\infty)$ функція $f(x) > 0$.

Пряма $x = 2$ є вертикальною асимптотою:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{2x^3}{x^2 - 4} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{2x^3}{x^2 - 4} = +\infty.$$

Знаходимо похилу асимптоту $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = 2;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3}{x^2 - 4} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x}{x^2 - 4} = 0.$$

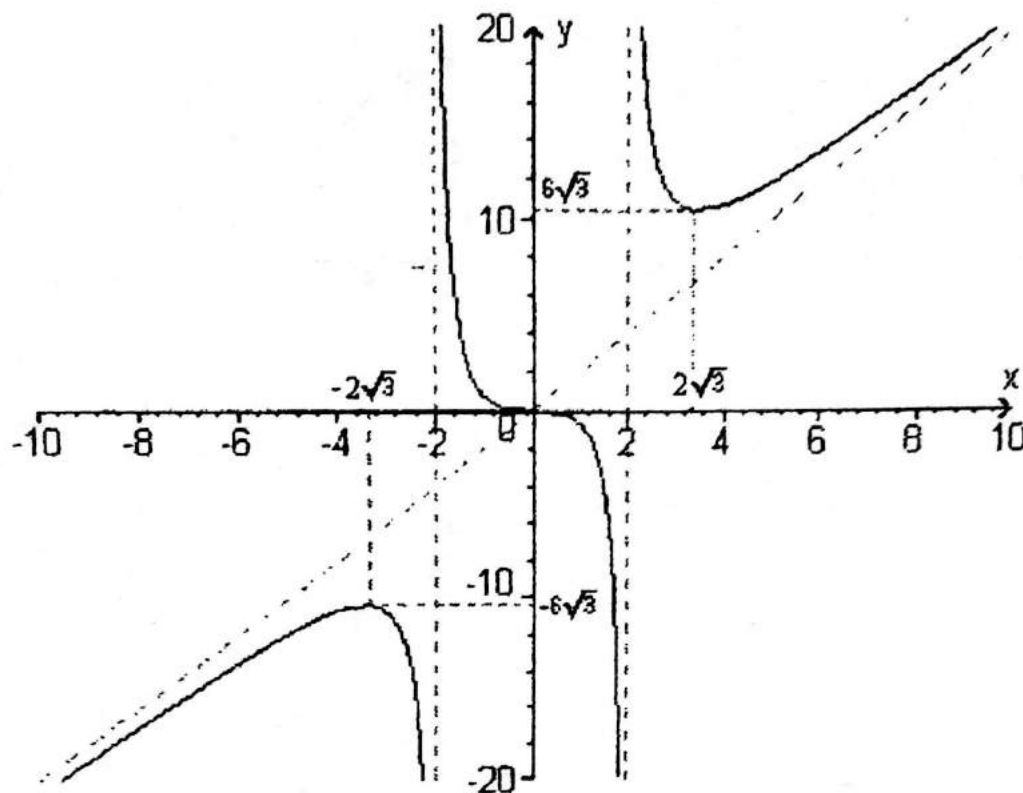
Крива має похилу асимптоту $y = 2x$. Причому

$$f(x) - 2x = \frac{8x}{x^2 - 4} > 0 \quad \text{при} \quad x > 2.$$

Перша похідна $y' = \frac{6x^2(x^2-4)-4x^4}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$ на проміжку $[0; +\infty)$ дорівнює нулю в точках $x = 0$, $x = 2\sqrt{3} \approx 3,46$ і перетворюється в нескінченність в точці $x = 2$. Оскільки $y'(2\sqrt{3} - 0) < 0$, а $y'(2\sqrt{3} + 0) > 0$, точка $A(2\sqrt{3}; 6\sqrt{3})$ є точкою мінімуму функції і на інтервалах $(0; 2)$ та $(2; 2\sqrt{3})$ функція спадає, а на інтервалі $(2\sqrt{3}; +\infty)$ — зростає.

Друга похідна $y'' = \frac{16x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$ перетворюється в нуль у точці $x = 0$ і в нескінченність при $x = 2$. На проміжку $(0; 2)$ функція опукла вгору, а на

$(2; +\infty)$ — опукла вниз. Точка $B(0;0)$ є точкою перегину графіка функції. Використовуючи результати досліджень, будуюмо графік.



Вправи

Побудувати графіки наступних функцій:

3.340. $y = 3x - x^3$;

3.342. $y = (x+1)(x-2)^2$;

3.344. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$;

3.346. $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$;

3.348. $y = \frac{x^2(x-1)}{(1+x)^2}$;

3.350. $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$;

3.352. $y = \frac{1}{x+1} - \frac{10}{3x^2} + \frac{1}{1-x}$;

3.341. $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$;

3.343. $y = \frac{2-x^2}{1+x^4}$;

3.345. $y = \frac{x}{(1+x)(1-x)^2}$;

3.347. $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$;

3.349. $y = \frac{x}{(1-x^2)^2}$;

3.351. $y = \frac{x^4 + 8}{x^3 + 1}$;

3.353. $y = (x-3)\sqrt{x}$;

$$3.354. y = \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}};$$

$$3.355. y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}};$$

$$3.356. y = \sqrt{\frac{x^4+3}{x^2+1}}.$$

Побудувати графіки наступних функцій:

$$3.357. y = e^{2x-x^2};$$

$$3.358. y = (1+x^2)e^{-x^2};$$

$$3.359. y = x + e^{-x};$$

$$3.360. y = x^{2/3}e^{-x};$$

$$3.361. y = e^{-2x} \sin^2 x;$$

$$3.362. y = \frac{e^x}{1+x};$$

$$3.363. y = \sqrt{1-e^{-x^2}}.$$

Побудувати криві, задані в параметричній формі:

$$3.364. \begin{cases} x = \frac{(t+1)^2}{4}, \\ y = \frac{(t-1)^2}{4}; \end{cases}$$

$$3.365. \begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3; \end{cases}$$

$$3.366. \begin{cases} x = \frac{t^2}{t-1}, \\ y = \frac{t}{t^2-1}; \end{cases}$$

$$3.367. \begin{cases} x = \frac{t^2}{1-t^2}, \\ y = \frac{1}{t^2+1}; \end{cases}$$

$$3.368. \begin{cases} x = t + e^{-t}, \\ y = 2t + e^{-2t}; \end{cases}$$

$$3.369. \begin{cases} x = a \cos 2t, \\ y = a \cos 3t; \end{cases} \quad (a > 0).$$

3.8. Задачі на максимум і мінімум

Приклади розв'язування вправ

1. Знайти прямокутник найбільшої площі, периметр якого дорівнює P .

Розв'язування. Нехай x — одна зі сторін прямокутника. Тоді друга сторона дорівнює $\frac{P}{2} - x$ і площа прямокутника $S(x) = x \cdot (\frac{P}{2} - x)$. Знайдемо максимальне значення функції $S(x)$. Похідна $S'(x) = (\frac{P}{2} - x) + x \cdot (-1) = \frac{P}{2} - 2x$. З рівняння $S'(x) = 0$ отримуємо $x = \frac{P}{4}$. Легко бачити, що $S'(\frac{P}{4} - 0) > 0$, $S'(\frac{P}{4} + 0) < 0$, а, отже, $x = \frac{P}{4}$ — точка максимуму. Таким чином, прямокутник найбільшої площі при заданому периметрі P має розміри $\{\frac{P}{4}, \frac{P}{4}\}$.

2. Через точку $M(x_0, y_0)$ еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ провести дотичну, яка утворює з осями координат трикутник, площа якого найменша.

Розв'язування. Враховуючи симетричність еліпса відносно початку координат, будемо вважати, що шукана точка $M(x_0, y_0)$ лежить у I чверті, тобто $0 < x_0 < a$, $0 < y_0 < b$. У I чверті $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, де $0 \leq x \leq a$. Оскільки $y' = \frac{b}{a} \cdot \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, то рівняння дотичної в точці $M(x_0, y_0)$ має вигляд

$$y - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2} = -\frac{bx_0}{a\sqrt{a^2 - x_0^2}}(x - x_0).$$

Знайдемо точку перетину цієї дотичної з осями координат. При $x = 0$ маємо

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2} + \frac{bx_0^2}{a\sqrt{a^2 - x_0^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 - x_0^2}},$$

а при $y = 0$ отримуємо $x = \frac{a^2 - x_0^2}{x_0} + x_0 = \frac{a^2}{x_0}$.

Отже, площа утвореного трикутника

$$S(x_0) = \frac{1}{2} \frac{ab}{\sqrt{a^2 - x_0^2}} \cdot \frac{a^2}{x_0} = \frac{a^3b}{2} \cdot \frac{1}{x_0\sqrt{a^2 - x_0^2}}.$$

Знайдемо точку мінімуму функції $S(x_0)$.

$$S'(x_0) = \frac{a^3b}{2} \cdot \frac{-\sqrt{a^2 - x_0^2} + \frac{x_0^2}{\sqrt{a^2 - x_0^2}}}{x_0^2(a^2 - x_0^2)} = -\frac{a^3b}{2} \cdot \frac{a^2 - 2x_0^2}{x_0^2(a^2 - x_0^2)^{3/2}}.$$

Легко бачити, що $x_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ точка мінімуму функції $S(x_0)$. Отже, $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}}; \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ шукана точка, а рівняння дотичної наступне

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right); \quad y = -\frac{b}{a}x + b\sqrt{2}.$$

Вправи

3.370. Знайти найбільше значення добутку m -ї і n -ї степені ($m > 0, n > 0$) двох додатніх чисел, сума яких стала і дорівнює a .

3.371. Знайти найменше значення суми m -ї і n -ї степені ($m > 0, n > 0$) двох додатніх чисел, добуток яких сталий і дорівнює a .

3.372. Зі всіх прямокутників даної площі S визначити той, периметр якого найменший.

3.373. Знайти прямокутний трикутник найбільшої площі, якщо сума катета і гіпотенузи його стала.

3.374. При яких лінійних розмірах закрита циліндрична банка даної місткості V буде мати найменшу повну поверхню?

3.375. У даний круговий сегмент, не більший півкруга, вписати прямокутник з найбільшою площею.

3.376. У еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вписати прямокутник зі сторонами, паралельними осям еліпса, площа якого найбільша.

3.377. В трикутник з основою b і висотою h вписати прямокутник з найбільшою площею.

3.378. У півкулю радіуса R вписати прямокутний паралелепіпед з квадратною основою найбільшого об'єму.

3.379. В кулю радіуса R вписати циліндр найбільшого об'єму.

3.380. В кулю радіуса R вписати циліндр з найбільшою повною поверхнею.

3.381. Навколо даної кулі описати конус найменшого об'єму.

3.382. Знайти найбільший об'єм конуса з даною твірною l .

3.383. У прямий круговий конус з кутом 2α в осьовому перерізі і радіусом основи R вписати циліндр з найменшою повною поверхнею.

3.384. Знайти найменшу відстань від точки $M(p, q)$ до параболи $y^2 = 2px$.

3.385. Знайти найменшу і найбільшу відстань точки $A(2, 0)$ від кола $x^2 + y^2 = 1$.

3.386. Знайти найбільшу хорду еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 < b < a$), що проходить через вершину $B(0, -b)$.

Зміст

Розділ 1. Теорія множин. Дійсні числа	4
1.1. Метод математичної індукції	4
1.2. Логічні символи. Операції над множинами	6
1.3. Відображення	9
1.4. Потужність множин. Дійсні числа	12
1.5. Верхня і нижня межа множини	14
1.6. Границя послідовності. Властивості збіжних послідовностей	16
1.7. Обчислення границь послідовностей	20
1.8. Монотонні послідовності. Критерій Коші	22
1.9. Верхня та нижня границі послідовності	25
Розділ 2. Границя функції. Неперервність	28
2.1. Границя функції в точці	28
2.2. Обчислення границь функцій	30
2.3. Обчислення границь з використанням чудових границь	33
2.4. Обчислення границь з використанням числа Ейлера	36
2.5. O-символіка	38
2.6. Неперервність функції	41
Розділ 3. Похідна та її застосування	48
3.1. Означення похідної. Диференціювання явно заданих функцій	48
3.2. Похідна оберненої функції і функцій заданих параметрично або неявно. Геометричний зміст похідної. Диференціал	53
3.3. Похідні і диференціали вищих порядків	59
3.4. Правило Лопітала	63
3.5. Формула Тейлора. Знаходження границь за допомогою фор- мули Тейлора	66
3.6. Монотонність, опуклість функцій. Точки екстремуму	69
3.7. Побудова графіків функцій	73
3.8. Задачі на максимум і мінімум	76